

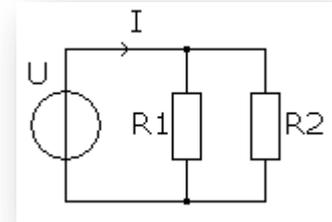
Schaltungen mit mehreren Widerständen



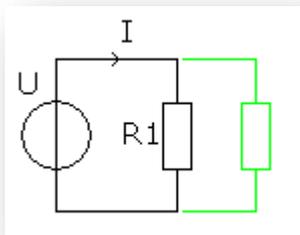
1) Parallelschaltung von Widerständen

In der rechten Schaltung ist eine Spannungsquelle mit $U=22\text{V}$ und zwei Widerständen mit $R_1=R_2=220\Omega$.

Gesucht ist der Strom I und die Ströme I_1 und I_2 durch die Widerstände.



Bei der Betrachtung von neuen Aufgaben ist eine Lösungsmöglichkeit die Aufgabe in bereits bekannte Zusammenhänge zu teilen.



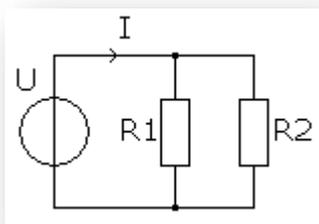
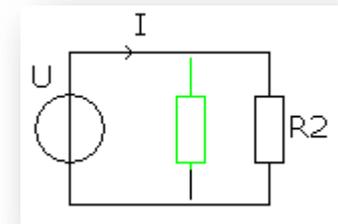
In der linken Schaltung ist nur der Widerstand R_1 im Stromkreis an der Spannungsquelle angeschlossen. Der Strom berechnet sich nach dem Ohmschen Gesetz mit

$$I = U / R_1 = 22\text{V} / 220\Omega = 0,1\text{A}$$

In der rechten Schaltung ist nur R_2 an die Spannungsquelle angeschlossen. Der Strom berechnet sich mit

$$I = U / R_2 = 22\text{V} / 220\Omega = 0,1\text{A}$$

Bei Widerstände sind gleich groß und bewirken bei einer Spannung von 22V einzeln einen Strom von $0,1\text{A}$.

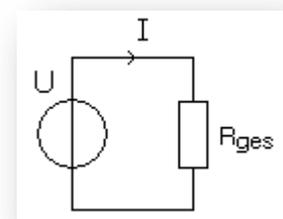


Sind nun beide Widerstände an der Spannungsquelle angeschlossen, so ist leicht verständlich, dass durch jeden Widerstand $0,1\text{A}$ fließt und dass daher der Gesamtstrom $I = 2 * 0,1\text{A} = 0,2\text{A}$ beträgt.

Nun ist der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung von R_1 und R_2 zu ermitteln. Überlegungsmäßig ist zu verstehen, dass, wenn der Strom durch beide Widerstände fließen kann, sich also verdoppelt, sich daher der Gesamtwiderstand reduziert, nämlich auf die Hälfte.

Das kann auch mit dem Ohmschen Gesetz nachgewiesen werden:

$$R_{\text{ges}} = U / I_{\text{ges}} = 22\text{V} / 0,2\text{A} = 110\Omega \text{ also die Hälfte der Einzelwiderstände!!}$$

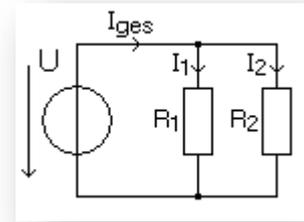


Wie ist das bei verschiedenen Widerstandswerten?

Ein Beispiel: $R_1 = 150 \Omega$, $R_2 = 300 \Omega$, $U = 15V$

Aus den Erklärungen beim Ohmschen Gesetz ist bekannt, dass durch den *kleineren* Widerstand der *größere* Strom fließt und umgekehrt.

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{15V}{150\Omega} = 100 \text{ mA}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{15V}{300\Omega} = 50 \text{ mA}$$



Der Gesamtstrom I_{ges} ist die Summe der beiden Ströme durch R_1 und R_2 .

$$I_{ges} = I_1 + I_2 = 100 \text{ mA} + 50 \text{ mA} = 150 \text{ mA}, \quad \text{damit } R_{ges} = \frac{U}{I_{ges}} = \frac{15V}{150 \text{ mA}} = 100 \Omega$$

Wie kann der Gesamtwiderstand ohne die Berechnung der Ströme ermittelt werden, da dieser letztlich unabhängig von der Spannung oder den Strömen ist?

In die Formel $I_{ges} = I_1 + I_2$ wird für die Ströme die Formel des Ohmschen

Gesetzes eingesetzt: $\frac{U}{R_{ges}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$ Wird diese Gleichung durch „U“ dividiert,

$$\text{ergibt sich } \frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Sind mehrere Widerstände parallel geschaltet, so wird die gleiche Gleichung einfach erweitert:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Wird die Gleichung für 2 Widerstände $\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ nach R_{ges} aufgelöst ergibt sich: $R_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$ oder mathematisch umgeformt $R_{ges} = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$

Eingesetzt mit den Werten des Beispiels ergibt dies

$$R_{ges} = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} = \frac{150\Omega * 300\Omega}{150\Omega + 300\Omega} = \frac{45000\Omega^2}{450\Omega} = 100\Omega$$

Die Eingabe in den Taschenrechner ist aber mit der allgemeinen Gleichung

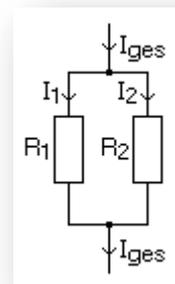
$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{einfacher} \quad \boxed{1} \boxed{5} \boxed{0} \boxed{1/x} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{1/x} \boxed{=} \boxed{1/x}$$

und vor allem bei mehreren parallel geschalteten Widerständen die einzige Möglichkeit den Gesamtwiderstand zu berechnen.

Nun einige Beispiele und Aufgaben:

1) $R_1=15\text{k}\Omega$, $R_2=470\Omega$. Gesucht: R_{ges}

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{15\text{k}} + \frac{1}{0,47\text{k}} \quad R_{\text{ges}} = 0,456\text{k}\Omega = 456\Omega$$



2) Zu R_1 mit $39\text{ k}\Omega$ soll ein Parallelwiderstand geschaltet werden, sodass ein Gesamtwiderstand von $36\text{ k}\Omega$ entsteht. Wie groß muss dieser sein.

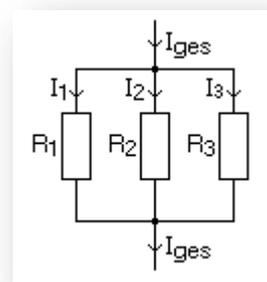
$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{aufgelöst nach} \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{\text{ges}}} - \frac{1}{R_1} = \frac{1}{36\text{k}} - \frac{1}{39\text{k}} \quad \text{ergibt} \quad R_2 = 468\text{k}\Omega$$

3) $R_{\text{ges}} = 24\Omega$, $R_1 = 120\Omega$, $R_2 = 48\Omega$. Gesucht: R_3

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad \text{aufgelöst nach} \quad \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_{\text{ges}}} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} =$$

$$= \frac{1}{24} - \frac{1}{120} - \frac{1}{48} \quad \text{ergibt} \quad R_3 = 80\Omega$$

2 4 1/x - 1 2 0 1/x - 4 8 1/x = 1/x

**Eine Betrachtung: Widerstand - Leitwert**

Die Gleichung $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ sagt auch aus, dass bei der Parallelschaltung von Widerständen sich ihre Kehrwerte ($1/x$ oder verkehrt proportional) addieren.

Der Kehrwert des Widerstandes ist der Leitwert^{*1)} mit dem Symbol „G“ und der Einheit „S“ (für Siemens) oder \mathcal{U} (Mho) im amerikanischen Raum.

Es ist auch gut verständlich, dass zwei parallele Widerstände mehr Stromfluß „zulassen“, als ein Widerstand. Zwei Schleusentore in einem Fluss können auch mehr Wasserfluss zulassen, wenn sie geöffnet werden, als nur ein Schleusentor.

Der Leitwert $G = \frac{1}{R}$ und dies eingesetzt im Ohmschen Gesetz ergibt $I = U * G$.

Obwohl der Leitwert (G) gut vorstellbar ist, wird in der Technik vorwiegend mit dem Widerstand (R) gerechnet, da er als Bauelement oder Eigenschaft eines elektrischen Elements hauptsächlich als „Hindernis“ für den Stromfluß verwendet oder verstanden wird.

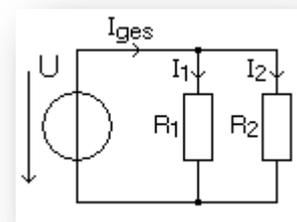
*1) http://de.wikipedia.org/wiki/Elektrischer_Leitwert

Stromteiler

In der Schaltung ist zu erkennen, dass beide Widerstände an der Spannungsquelle angeschlossen sind.

Es gilt: $U = I_1 * R_1 = I_2 * R_2$

Die Gleichung wird nun nach dem Verhältnis der Widerstände und der Ströme aufgelöst:



$$I_1 * R_1 = I_2 * R_2 \quad | :I_1$$

$$R_1 = \frac{I_2 * R_2}{I_1} \quad | :R_2$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

Aus der Schlussgleichung ist zu erkennen, dass sich die Widerstände verkehrt proportional zu den Strömen verhalten.

Dies ist auch von der Logik her leicht zu verstehen, da der *kleinere* Widerstand einen *größeren* Strom und der *größere* Widerstand einen *kleineren* Strom zulässt.

Erkenntnisse:

- 1) Der Gesamtstrom I_{ges} von der Spannungsquelle kommend, teilt sich in die beiden Ströme I_1 und I_2 auf. Nach den Widerständen kommen die beiden Ströme wieder zusammen und fließen als I_{ges} zurück zur Spannungsquelle.
- 2) Die Ströme verhalten sich verkehrt proportional zu den Widerstandswerten.
- 3) Ströme werden durch Widerstände nicht verringert.

Nun einige Beispiele und Aufgaben:

1) $R_2=6k\Omega$, $R_1=2k\Omega$, $I_2=20mA$, $I_1=?$

$$I_1 / I_2 = R_2 / R_1 \quad \text{aufgelöst nach } I_1 \text{ ergibt}$$

$$\rightarrow \mathbf{I_1 = I_2 * R_2 / R_1 = 20mA * 6k\Omega / 2k\Omega = 60mA}$$

2) $I_1=40mA$, $I_{ges}=100mA$, $R_2=300\Omega$, $R_1=?$

$$I_{ges} = I_1 + I_2 \quad \rightarrow \quad I_2 = I_{ges} - I_1 \quad 100mA - 40mA = 60mA$$

$$I_1 / I_2 = R_2 / R_1 \quad \text{aufgelöst nach } R_1 \text{ ergibt}$$

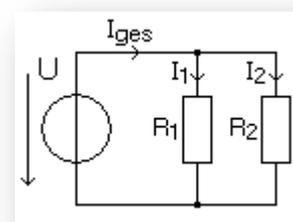
$$\rightarrow \mathbf{R_1 = R_2 * I_2 / I_1 = 300\Omega * 60mA / 40mA = 1800 / 40 = 450\Omega}$$

3) R_1 ist dreimal so groß wie R_2 , $I_2=300mA$, $I_1=?$

$$R_1 = 3 * R_2$$

$$I_1 / I_2 = R_2 / R_1 \quad \text{aufgelöst nach } I_1 \text{ ergibt}$$

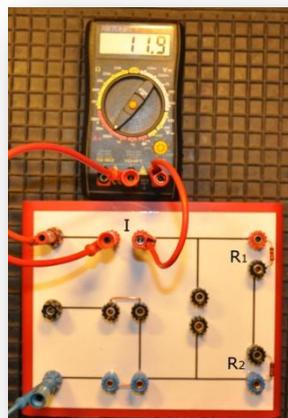
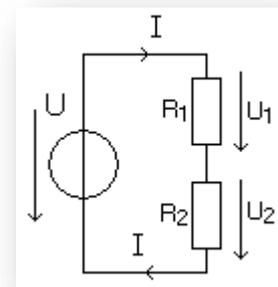
$$\rightarrow \mathbf{I_1 = I_2 * R_2 / R_1 = I_2 * R_2 / 3 * R_2 = 300mA * 1/3 = 100mA}$$



2) Serienschaltung von Widerständen

An einer Spannungsquelle sind zwei Widerstände in Serie, also hintereinander geschaltet, angeschlossen. Es fließt ein Strom durch die Widerstände, der an diesen jeweils einen Spannungsabfall bewirkt (siehe Ohmsches Gesetz).

An einem praktischen Versuch sollen die Zusammenhänge von Spannungsquelle, Strom, Einzelwiderstand, Gesamtwiderstand und Spannungsabfälle gemessen werden.



Am rechten Rand ist zwischen den rot-schwarz-Klemmen (oberhalb) und den schwarz-blau-Klemmen (unterhalb) jeweils ein kleiner Widerstand, entsprechend der Schaltung R1 und R2 eingeklemmt. Ober dem Steckbrett ist ein Multimeter zu sehen, das den Strom „I“ misst. Am linken Rand sind eine rote und eine blau Steckbuchse, von denen ein rotes und blaues Kabel zum regelbaren Netzgerät führt, entsprechend der Spannungsquelle in der Schaltung. Die Spannungen an den Widerständen werden mit einem weiteren Multimeter gemessen, das nicht im Bild zu sehen ist.

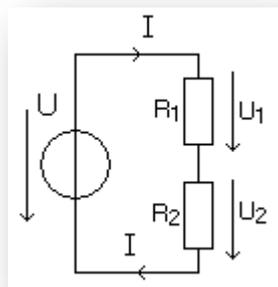
Nr.	U_{ges}	I	U_1	U_2	U_1+U_2	$R_{1\ err}$	$R_{2\ err}$	R_1+R_2
	V	mA	V	V	V	Ω	Ω	Ω
1	12,00	12,00	3,91	8,11	12,02	325,8	675,8	1001,6
2	8,00	7,99	2,60	5,40	8,00	325,4	675,8	1001,3
3	4,00	3,98	1,29	2,69	3,98	324,1	675,8	1000,0

Es wurden bei dem Versuch drei Spannungen, 12V, 8V, 4V benutzt, um die Zusammenhänge mehrmals überlegen zu können. Die schwarz eingetragenen Werte sind die Messwerte des Versuches, die dunkelroten Werte sind die daraus errechneten Ergebnisse.

Die Widerstände waren Kohleschichtwiderstände mit 330Ω (R_1) und mit 680Ω (R_2) und mit einer max. Verlustleistung von $\frac{1}{2}$ W angegeben. Mit dem Ohmmeter wurden für R_1 - 326Ω und für R_2 - 678Ω gemessen.

Bei praktischen Versuchen und Messungen ist zu berücksichtigen, dass alle Bauteile Toleranzen bis zu 5% und Messgeräte je nach Gerät eine Messgenauigkeit von etwa 1% haben.

Der Werte des Widerstandes R_1 ist mit 330Ω angegeben, gemessen wurde er mit 326Ω und errechnet wurde dieser mit 325Ω , aber alles in den Toleranzen.



Nun werden die Zusammenhänge genauer betrachtet.

U_{ges}	I	U_1	U_2	U_1+U_2
V	mA	V	V	V
12,00	12,00	3,91	8,11	12,02

Die Gesamtspannung beträgt 12V, an den Widerständen fallen 3,91V und 8,11V ab. Zusammen ergibt das wieder die 12V Gesamtspannung. Dies ist klar zu erkennen, dass die Spannungsabfälle die Gesamtspannung ergeben muss, denn woher käme eine Differenz?

Erkenntnis 1: Die Gesamtspannung „U“ ist die die Summe der Teilspannungen.

Mittels Ohmschen Gesetzes können die Widerstände errechnet werden

U_{ges}	I	U_1	U_2	$R_{1\ err}$	$R_{2\ err}$
V	mA	V	V	Ω	Ω
12,00	12,00	3,91	8,11	325,8	675,8

Aus der Tabelle ist zu erkennen, dass U_1 und R_1 kleiner sind und U_2 und R_2 etwas mehr als doppelt so groß sind. Die genauen Verhältnisse ergeben:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{8,11V}{3,91V} = \frac{675,8\Omega}{325,8\Omega} = 2,074$$

Erkenntnis 2: Die Spannungsabfälle über die Widerstände verhalten sich wie die Widerstandswerte, also direkt proportional.

Und noch ein direkt proportionales Verhältnis ist erkennbar:

U_{ges}	I	U_1	U_1+U_2	$R_{1\ err}$	R_1+R_2
V	mA	V	V	Ω	Ω
12,00	12,00	3,91	12,02	325,8	1001,6

$$\frac{U_1}{U_{ges}} = \frac{R_1}{R_{ges}} = \frac{3,91V}{12V} = \frac{325,8\Omega}{1001,6\Omega} = 0,325$$

Erkenntnis 3: Teilspannung zu Gesamtspannung wie Teilwiderstand zu Gesamtwiderstand

Allgemeine Erkenntnis der Serienschaltung: Die Spannungen verhalten sich wie die Widerstände.

Es gilt weiters (für beliebig viele in Serie geschaltete Widerstände):

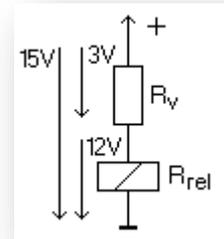
Die Summe der Teilspannungen ergibt die Gesamtspannung.

Die Summe der Teilwiderstände ergibt den Gesamtwiderstand.

Spannungsteiler in Anwendungen

In einer Steuerung soll ein Relais mit 12V Betriebsspannung verwendet werden. Der Widerstand des Relais beträgt 600Ω . Die Betriebsspannung der Steuerung beträgt 15V.

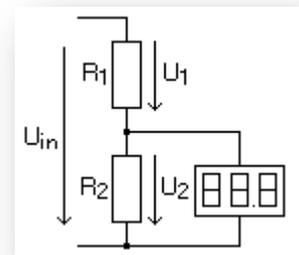
Um das Relais nicht zu überlasten muss ein Vorwiderstand vorgesehen werden, über dem die Spannungsdifferenz von 3V abfällt.



Laut der Erkenntnisse für die Serienschaltung, dass sich die Spannungen, wie die Widerstände verhalten gilt:

$$\frac{R_v}{R_{rel}} = \frac{U_v}{U_{rel}} \text{ umgewandelt nach: } R_v = R_{rel} * \frac{U_v}{U_{rel}} = 600\Omega * \frac{3V}{12V} = 150\Omega$$

Ein weiteres Beispiel. Ein Anzeigemodul benötigt 100mV um 100 anzuzeigen. Mit diesem Modul soll aber eine Spannung bis 10V angezeigt werden. Das bedeutet, dass die Eingangsspannung (U_{in}) von 10V auf 100mV (U_2) geteilt werden muss.



Der Gesamtwiderstand der Spannungsmessung soll $100k\Omega$ betragen.

Wie im vorigen Beispiel verhalten sich die Spannungen wie die Widerstände, daher gilt:

$$\frac{R_1}{R_{ges}} = \frac{U_1}{U_{in}} \text{ umgewandelt nach: } R_1 = R_{ges} * \frac{U_1}{U_{in}} = 100k\Omega * \frac{9,90V}{10V} = 99k\Omega,$$

$$R_2 = R_{ges} - R_1 = 100k\Omega - 99k\Omega = 1k\Omega$$
