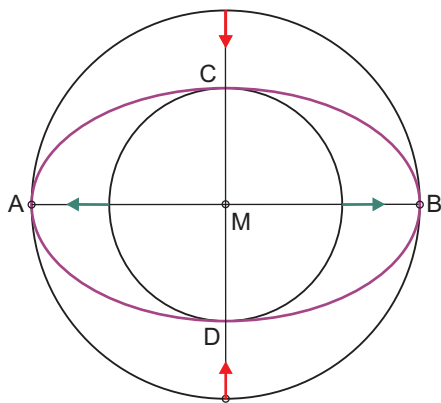


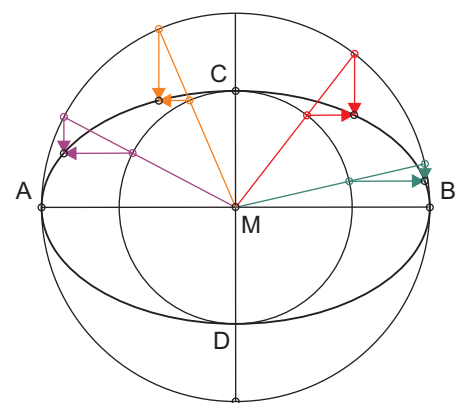
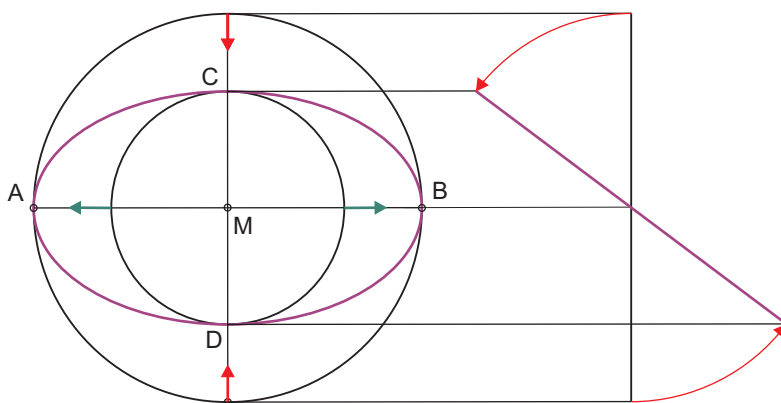
Die Ellipse, Zusammenhänge und Konstruktionen



Die Ellipse hat eine große Achse AB und eine kleine Achse CD. Es lassen sich zwei Kreise bilden, einer mit dem großen Durchmesser AB und einer dem kleinen Durchmesser CD.

In der linken Zeichnung ist vorstellbar, wie der große Kreis vertikal "gedrückt" und der kleine Kreis horizontal gedehnt wird, bis die violette Ellipse erreicht wird.

Diese vertikale "Verkürzung" lässt sich mit einer Drehung des großen Kreises veranschaulichen, bei dem dieser als Ellipse abgebildet wird. Siehe untere, linke Zeichnung.

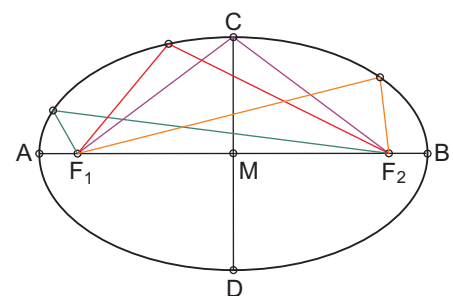


Werden nun beliebige Radien (violett, orange, rot, grün) in die Kreise eingezeichnet, so ergeben diese jeweils auf dem kleinen und dem großen Kreis affine (zugeordnete) Punkte. Werden von diesen aus die Verkürzung in vertikaler Richtung und die Dehnung in horizontaler Richtung ausgeführt, ergibt dies exakte Punkte auf der Ellipse. Siehe oberes, rechtes Bild. Dies ist eine Methode Ellipsen zu konstruieren, wenn die Scheitel (A, B, C, D) gegeben sind.

Die geometrische Definition der Ellipse bezieht sich auf die Brennpunkte:

Die Ellipse ist die Menge aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten (den Brennpunkten F_1 und F_2), gleich groß ist (nämlich die große Achse AB).

Die Brennpunkte werden aus dieser Definition her konstruiert, indem der halbe große Durchmesser (AM) vom Scheitelpunkt C auf den großen Durchmesser abgeschlagen wird.

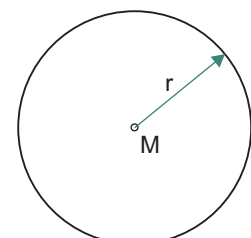


<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/bc/ElipseAnimada.gif/220px-ElipseAnimada.gif>

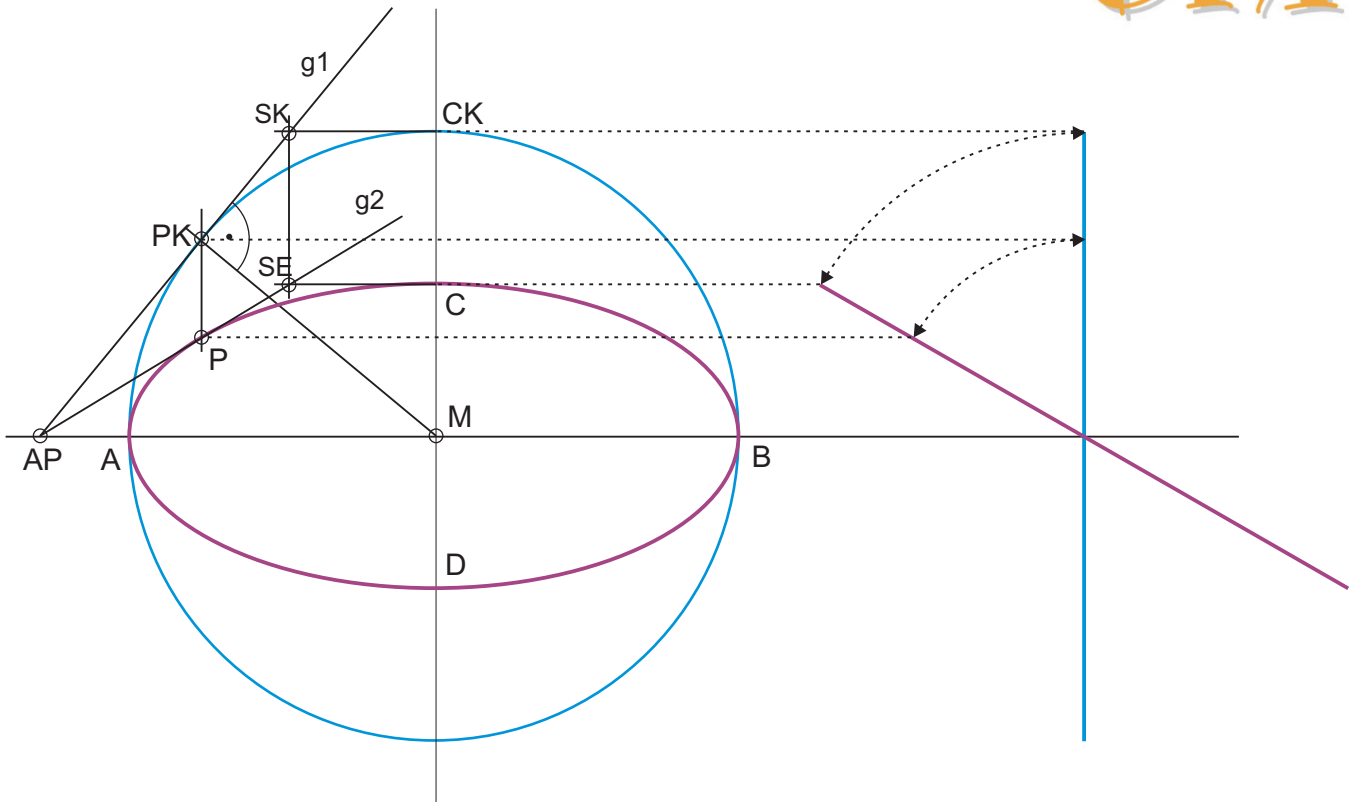
In der Animation im obigen Link ist diese Definition klar zu erkennen und daraus geht auch die sogenannte Papierstreifenmethode hervor, bei der in die Brennpunkte Stecknadeln gesetzt werden und ein geschlossenes Band mit der doppelten Länge des großen Durchmessers gemäß der Animation mit dem Bleistift eine Ellipse gezeichnet werden kann.

Der Vergleich der Ellipse mit dem Kreis, der auch als Ellipse mit zwei gleichen Achsen betrachtet werden kann, ergibt, dass die Definition des Kreises bedeutend einfacher ist:

Der Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem Punkt (dem Mittelpunkt "M") gleich weit entfernt sind (Radius "r").



Konstruktion einer Tangente in einem Punkt



Im Punkt P der Ellipse soll eine Tangente konstruiert werden. Da eine Ellipse als schräge Ansicht eines Kreises gesehen werden kann, können alle Kreiskonstruktionen affin (zugeordnet) auf die Ellipse angewandt werden.

1. Um die Ellipse wird ein Kreis mit dem Radius der großen Ellipsenachse gezeichnet (In der rechten Seitenansicht entspricht das einem "Aufrichten" der elliptischen Darstellung des violetten Kreises in Hauptlage). Der affine Punkt auf dem Kreis ist PK.

2. Durch diesen Kreispunkt wird nun eine Kreistangente konstruiert.

2.1 Verbindung von Punkt PK mit Punkt M.

2.2 Im rechten Winkel entsteht die Gerade g1, die Tangente an den Kreis.

2.3 Diese schneidet die horizontale Achse im Punkt AP.

3. Vom oberen Scheitel des Kreises wird eine zur Achse parallele Gerade gelegt (Scheiteltangente Kreis), die den Schnittpunkt SK ergibt.

4. Vom Punkt C der Ellipse wird ebenfalls eine Gerade parallel zur Achse gelegt (Scheiteltangente Ellipse).

5. Nun wird der Punkt SK auf die "Schräglage" des violetten Kreises, der Ellipse gedreht und ergibt den Punkt SE.

6. Der Punkt SE wird nun mit dem Punkt AP verbunden und ergibt g2, die Tangente an die Ellipse.

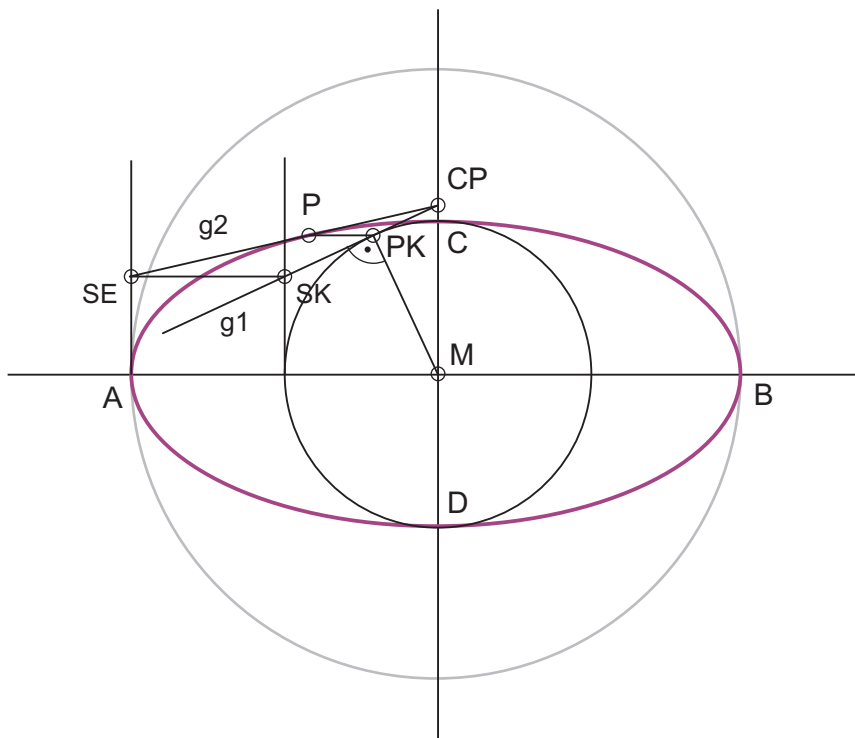
Diese Konstruktion eignet sich besonders, um zwischen den Krümmungskreisen der Ellipse bei der Näherungskonstruktion einen genauen Punkt der Ellipse und dessen Tangente zu zeichnen. Auf den nächsten Seiten wird dies im Detail gezeigt.

Der Punkt AP "wandert" weiter von der Ellipse weg, je näher der gewünschte Tangentenpunkt zum oberen Scheitelpunkt C der Ellipse gelegt wird.

In der Zeichnung sind alle Zusammenhänge zwischen Kreis und Ellipse gezeichnet und erklärt.

Ab Seite 4 werden Konstruktionen der Ellipse in Einzelschritten erklärt.

Konstruktion einer Tangente in einem Punkt



Die gleiche Konstruktion, wie auf Seite 2, ist, auch um 90° gedreht auf den kleinen Kreis der Ellipse bezogen, möglich.

Im Punkt P der Ellipse soll eine Tangente konstruiert werden. Da eine Ellipse als schräge Ansicht eines Kreises gesehen werden kann, können alle Kreiskonstruktionen affin (zugeordnet) auf die Ellipse angewandt werden.

1. In die Ellipse wird ein Kreis mit dem Radius der kleinen Ellipsenachse gezeichnet. Der affine Punkt auf dem Kreis ist PK.
2. Durch diesen Kreispunkt wird nun eine Kreistangente konstruiert.
 - 2.1 Verbindung Punkt PK mit Punkt M.
 - 2.2 Im rechten Winkel entsteht die Gerade g1, die Tangente an den Kreis.
 - 2.3 Diese schneidet die vertikale Achse im Punkt CP.
3. Vom linken Scheitel des Kreises wird eine zur vertikalen Achse parallele Gerade gelegt (Scheiteltangente Kreis), die den Schnittpunkt SK ergibt.
4. Vom Punkt A der Ellipse wird ebenfalls eine Gerade parallel zur vertikalen Achse gelegt (Scheiteltangente Ellipse).
5. Nun wird der Punkt SK von der Kreistangente auf die Ellipsentangente SE "gedehnt".
6. Der Punkt SE wird nun mit dem Punkt CP verbunden und ergibt g2, die Tangente an die Ellipse.

Diese Konstruktion eignet sich besonders, um zwischen den Krümmungskreisen der Ellipse bei der Näherungskonstruktion einen genauen Punkt der Ellipse und dessen Tangente zu zeichnen.

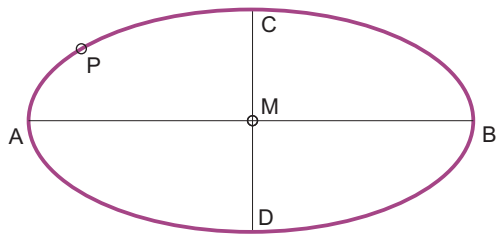
In der Zeichnung sind alle Zusammenhänge zwischen Kreis und Ellipse gezeichnet und erklärt.

Auf den nächsten Seiten werden Konstruktionen der Ellipse in Einzelschritten erklärt.

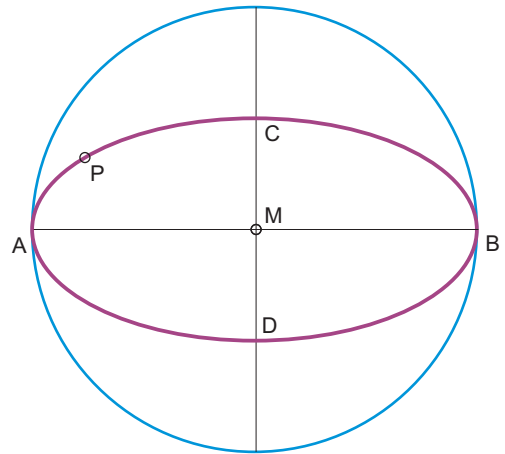
Konstruktionen an der Ellipse im Detail: Tangente



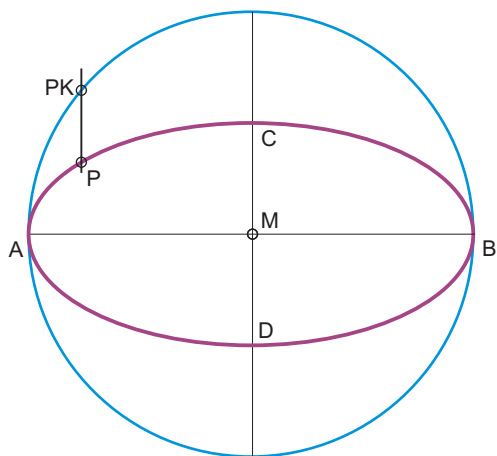
1) Ellipse gegeben, durch den Punkt P soll eine Tangente gelegt werden



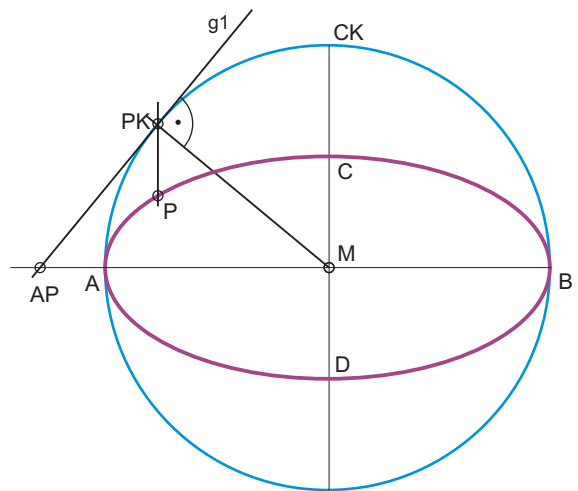
2) Ein Kreis mit dem Durchmesser der großen Achse, der "Großkreis" wird der Ellipse "umschrieben".



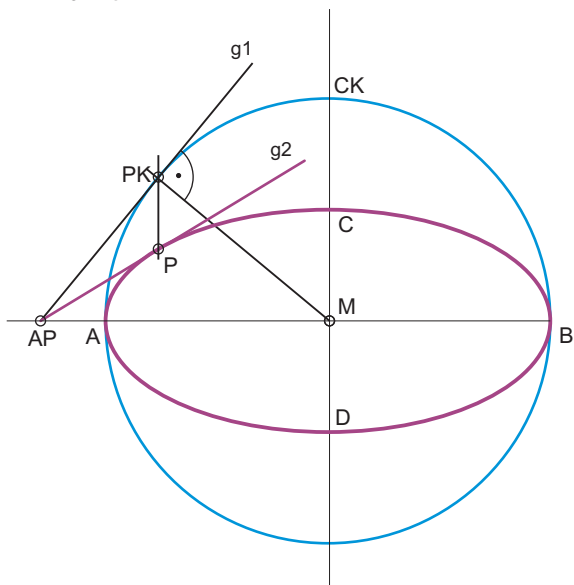
3) Der Punkt P wird von der Ellipse auf den Kreis "übertragen" und ergibt PK.



4) Durch PK wird die Tangente an den Kreis konstruiert. Die Tangente g1 schneidet die verlängerte große Achse der Ellipse im Punkt AP.



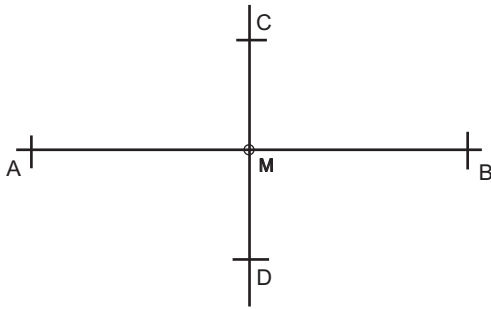
5) Der Tangentenpunkt PK wird auf die Ellipse rückgeführt und ergibt die Tangente durch den Punkt P.



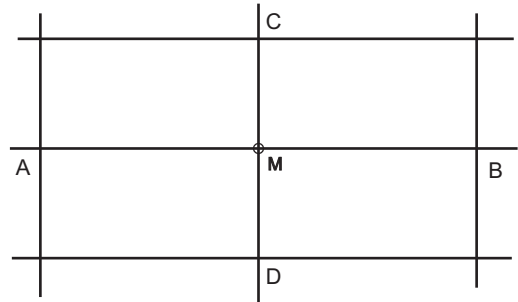
Näherungskonstruktion der Ellipse



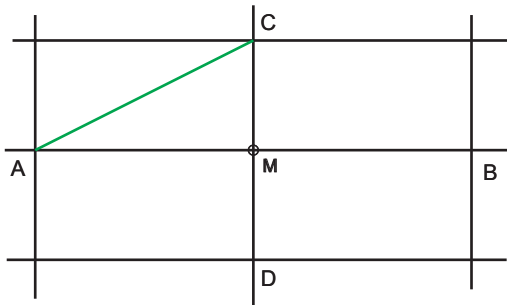
1) Ellipse durch die beiden Achsen gegeben



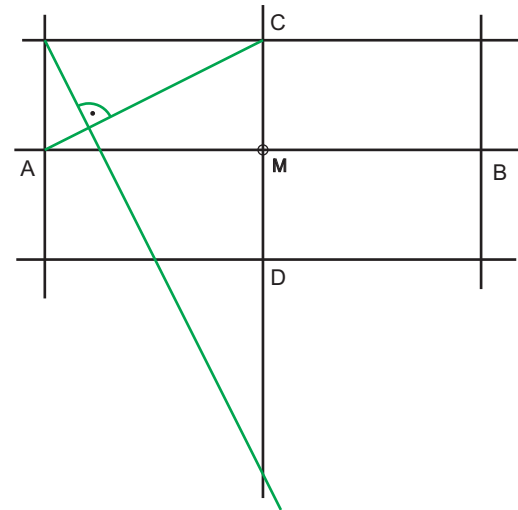
2) Umschließendes Rechteck zeichnen



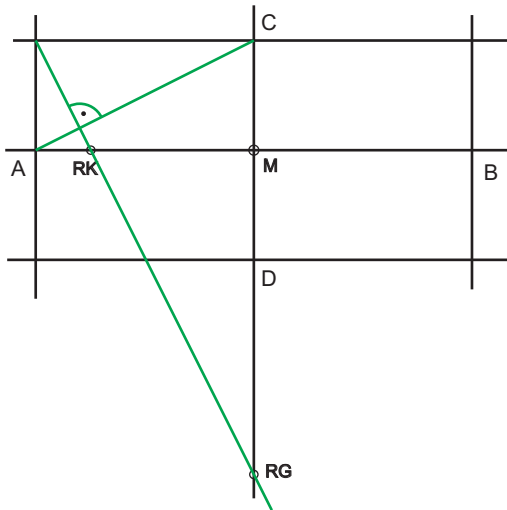
3) Kleine Achse und große Achse an den Scheitelpunkten verbinden. AC oder AD oder BC oder BD.



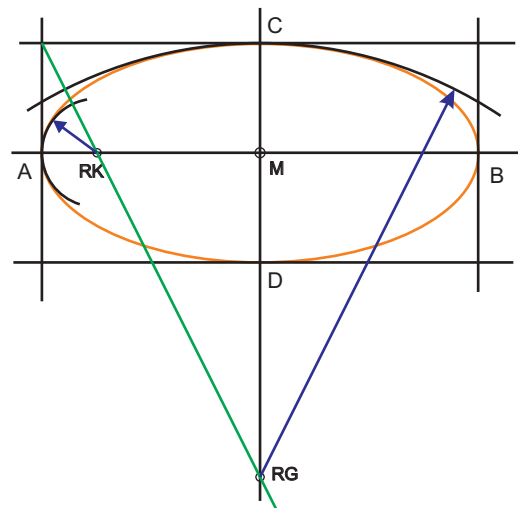
4) Eine Senkrechte auf diese Verbindungslinie durch den nächst gelegenen Eckpunkt des Rechteckes zeichnen.



5) Diese Senkrechte ergibt auf der großen Achse und auf der verlängerten kleinen Achse die Mittelpunkte RK und RG der Krümmungsradien.



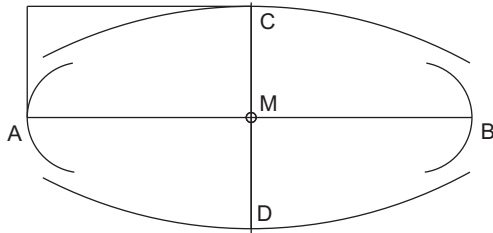
6) Von diesen Mittelpunkten RK und RG können nun die Krümmungskreise gezeichnet werden. Um die anderen beiden Krümmungskreise zeichnen zu können, werden die Mittelpunkte gespiegelt (rechts und oben)



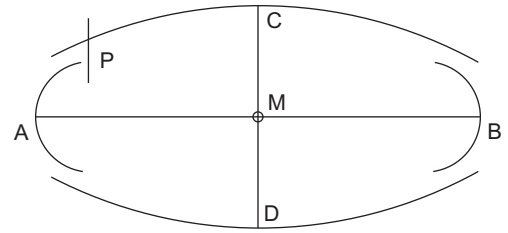
Konstruktionen an der Ellipse: Punkt und Tangente



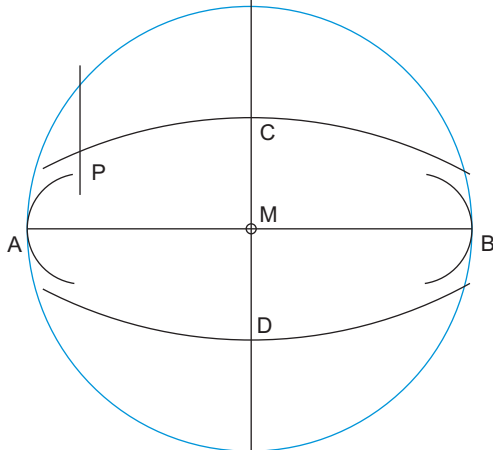
1) Mit der Näherungskonstruktion wurden die Krümmungskreise der Ellipse gezeichnet.



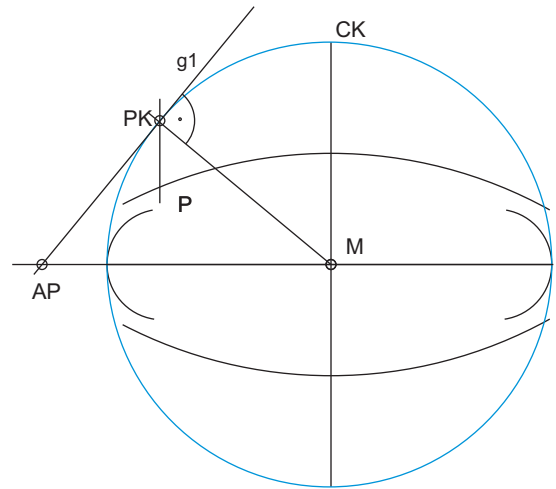
2) Im Überlappungsbereich der Krümmungskreise ist ein genauer Punkt P der Ellipse zu konstruieren.



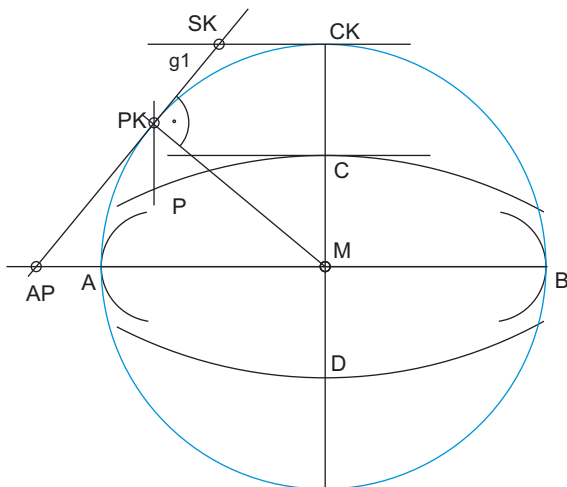
3) Der "Großkreis" wird der Ellipse umschrieben.



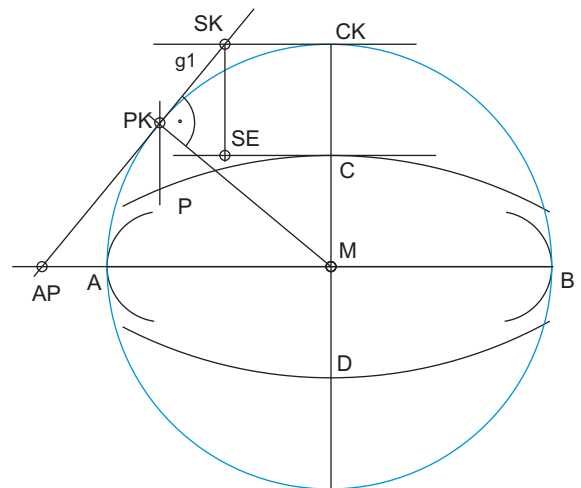
4) Durch den Punkt PK wird die Tangente an den Kreis konstruiert und diese ergibt auf der Achse den Punkt AP.



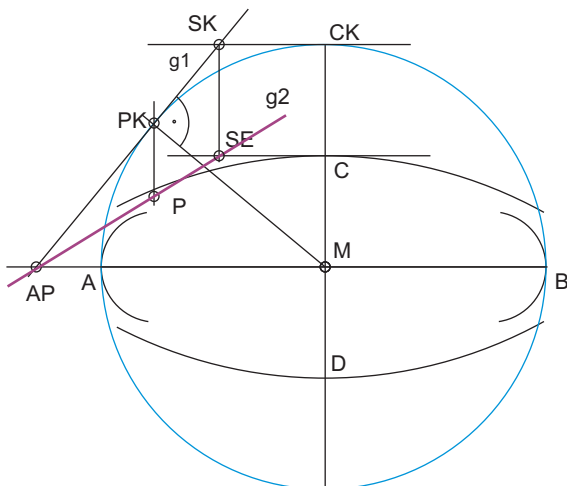
5) Auf der Scheiteltangente ergibt sich SK.



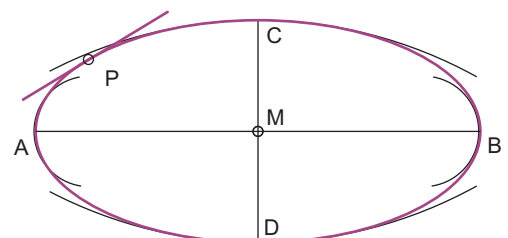
6) Der Punkt SK wird auf die Scheiteltangente der Ellipse übertragen und ergibt den Punkt SE und ...



7) .. Und dieser mit AP verbunden ergibt den Punkt P.



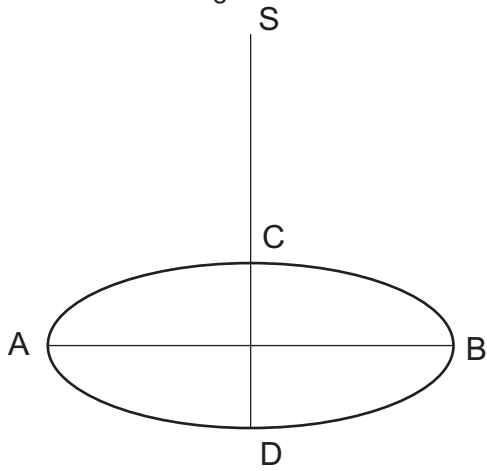
8) Die Ellipse kann gezeichnet werden. Zusätzlich zum Punkt P ist auch die Tangente konstruiert worden.



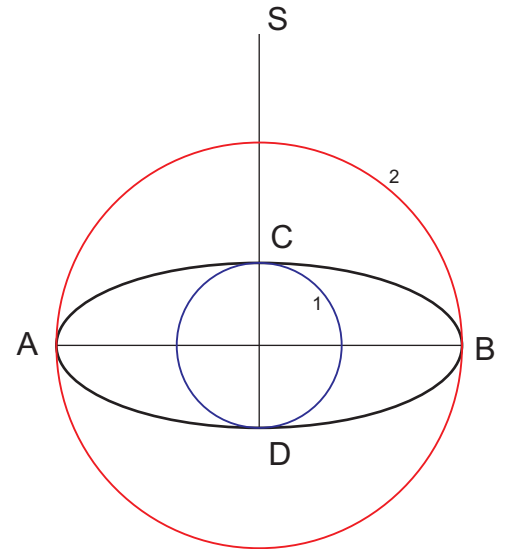
Konstruktionen an der Ellipse: Tangente vom Punkt S



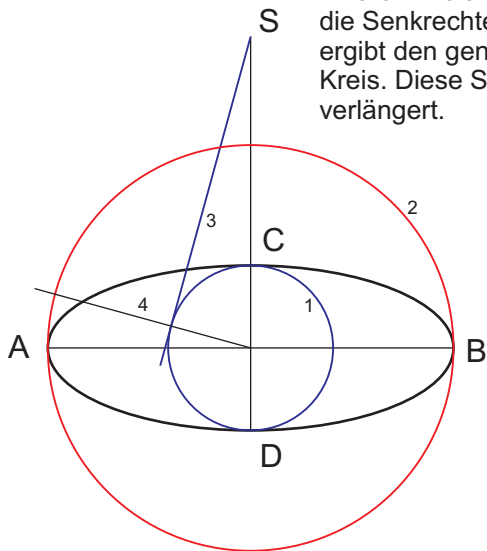
1) Gegeben ist eine Ellipse mit den beiden Achsen AB und CD und der Punkt S, der sich auf einer verlängerten Achse, zum Beispiel die Spitze eines Kegels, befindet. Mit der Näherungskonstruktion wird die Ellipse gezeichnet.



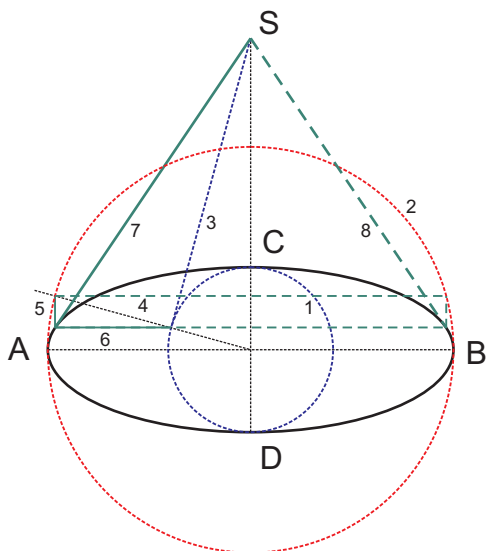
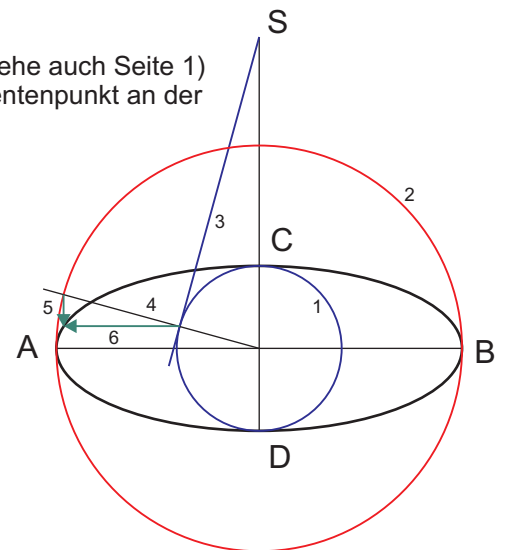
2) Nun werden die beiden Scheitelkreise 1 und 2 mit den Radien der jeweils halben Ellipsenachsen gezeichnet. Mit diesen beiden Kreisen kann die Ellipse auch konstruiert werden, wie schon auf Seite 1 erklärt wurde.



3) Als nächstes wird die Tangente an den inneren Kreis durch den Punkt S gelegt und die Senkrechte darauf durch den Mittelpunkt ergibt den genauen Tangentenpunkt am Kreis. Diese Senkrechte 4 wird zum Kreis 2 verlängert.



4) Die Hilfslinien 5 und 6 (siehe auch Seite 1) ergeben den exakten Tangentenpunkt an der Ellipse vom Punkt S aus.

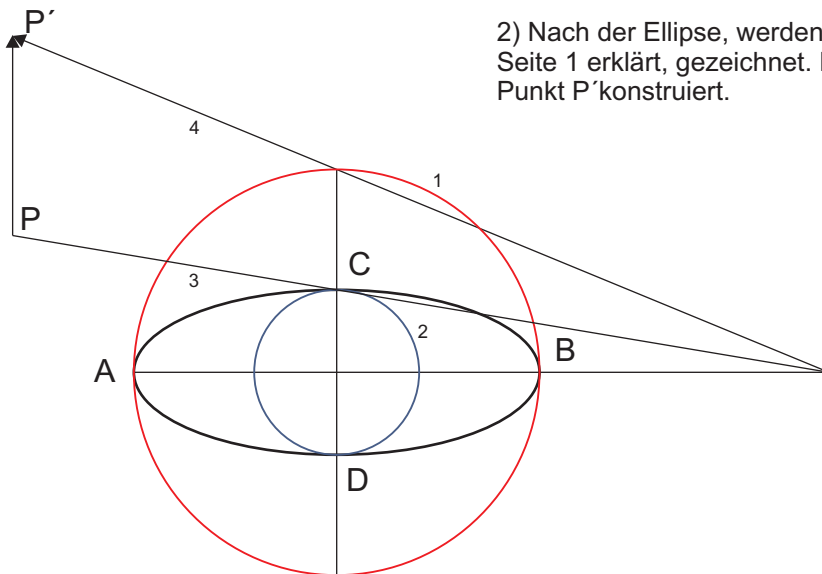


4) Nun wird dieser Tangentenpunkt mit dem Punkt S verbunden und ergibt die Tangente 7 an die Ellipse AB CD. Durch Spiegelung der Linien 5 und 6 auf die rechte Seite, kann die zweite Tangente 8 einer Kegeldarstellung konstruiert werden (gestrichelt gezeichnet).

Konstruktionen an der Ellipse: Tangente vom Punkt P

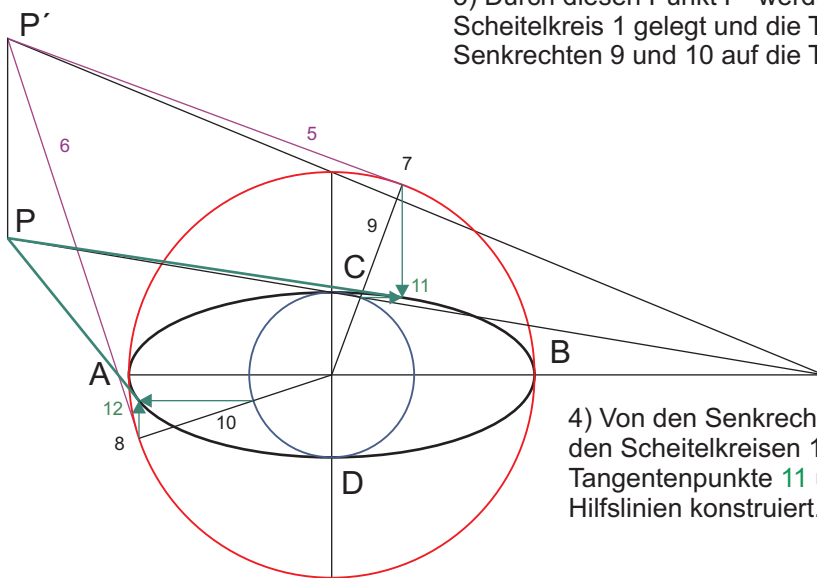


1) Gegeben ist eine Ellipse mit den beiden Achsen AB und CD und der Punkt P, der sich seitlich, außerhalb der Ellipse, zum Beispiel als Spitze eines Kegels im Schrägriss, befindet. Mit der Näherungskonstruktion wird die Ellipse gezeichnet.



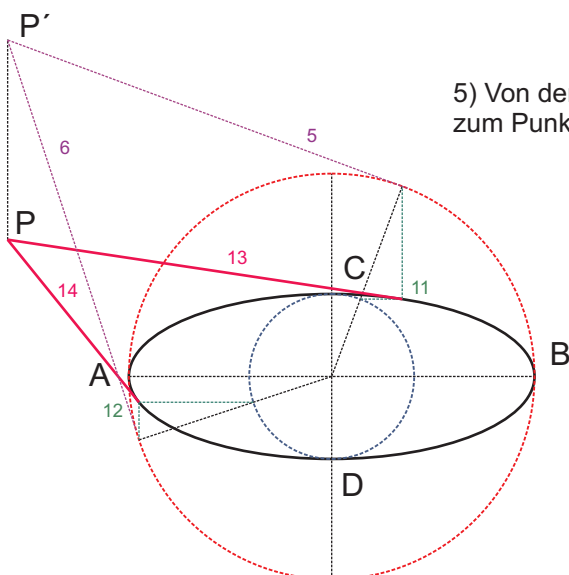
2) Nach der Ellipse, werden Scheitelkreise 1 und 2, wie auf Seite 7 und Seite 1 erklärt, gezeichnet. Danach wird mit den Hilfslinien 3 und 4 der Punkt P' konstruiert.

3) Durch diesen Punkt P' werden nun die beiden Tangenten 5 und 6 an den Scheitelkreis 1 gelegt und die Tangentenpunkte 7 und 8 über die, jeweils Senkrechten 9 und 10 auf die Tangenten durch den Mittelpunkt, festgelegt.



4) Von den Senkrechten 9 und 10 und deren Schnittpunkte mit den Scheitelkreisen 1 und 2, werden nun die eigentlichen Tangentenpunkte 11 und 12 an der Ellipse mit den grünen Hilfslinien konstruiert.

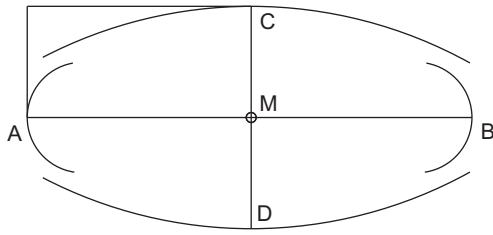
5) Von den Tangentenpunkten 11 und 12 werden die Tangenten 13 und 14 zum Punkt P gezeichnet.



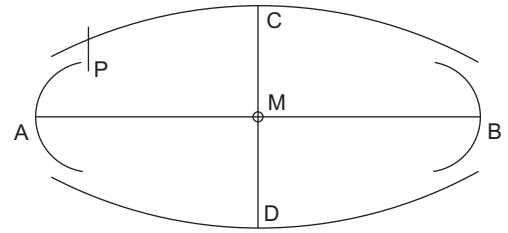
Konstruktionen an der Ellipse: Punkt im Bereich Meth.1



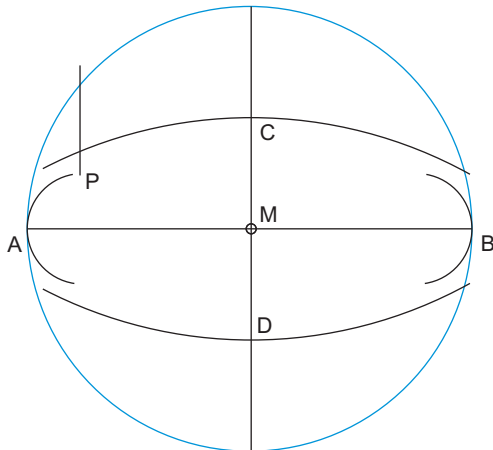
1) Mit der Näherungskonstruktion wurden die Krümmungskreise der Ellipse gezeichnet.



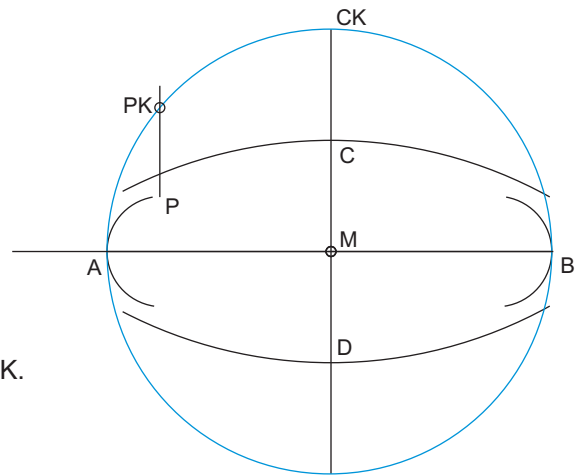
2) Im Überlappungsbereich der Krümmungskreise ist ein genauer Punkt P der Ellipse zu konstruieren.



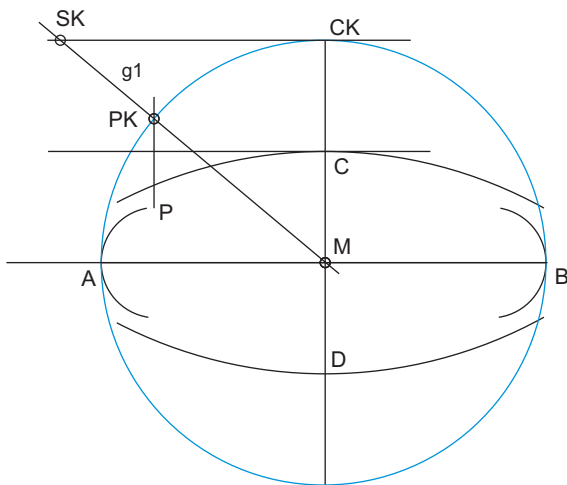
3) Der "Großkreis" wird der Ellipse umschrieben.



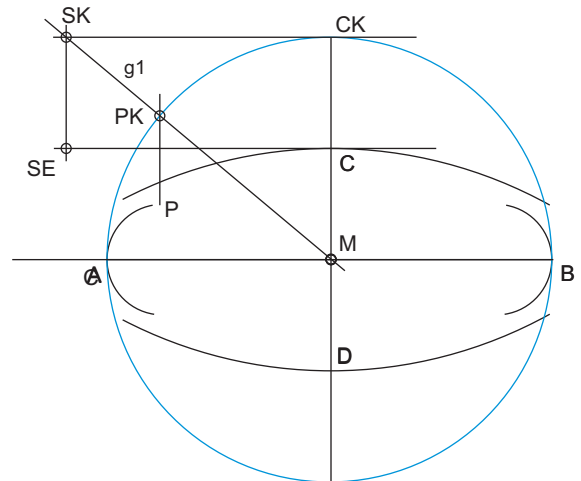
4) Der Punkt P wird auf den Kreis übertragen und ergibt PK.



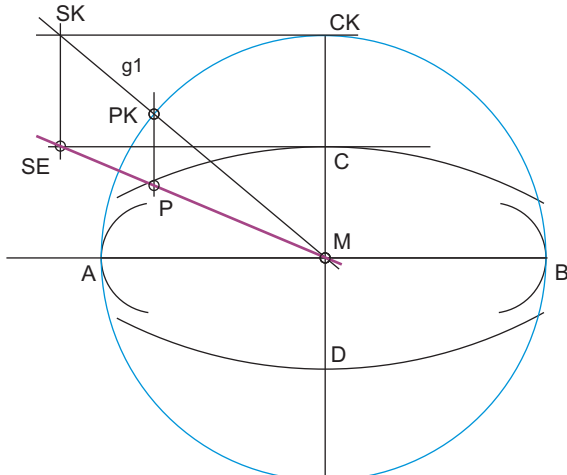
5) Die Verbindung M mit PK auf die Scheiteltangente ergibt SK.



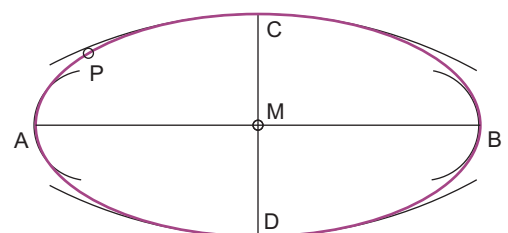
5) SK auf die Scheiteltangente der Ellipse übertragen ergibt den Punkt SE und



5) ..und dieser mit M verbunden ergibt den Punkt P.



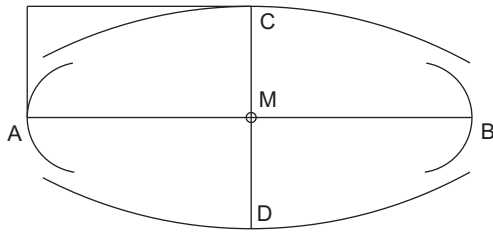
8) Die Ellipse kann gezeichnet werden.



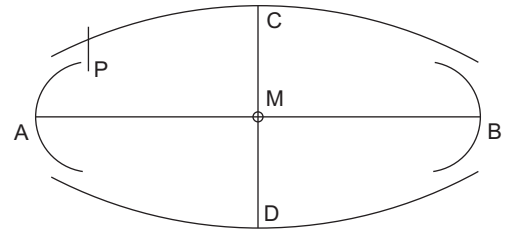
Konstruktionen an der Ellipse: Punkt im Bereich Meth.2



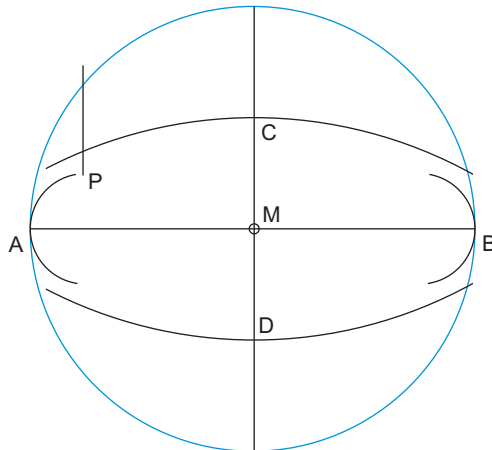
1) Mit der Näherungskonstruktion wurden die Krümmungskreise der Ellipse gezeichnet.



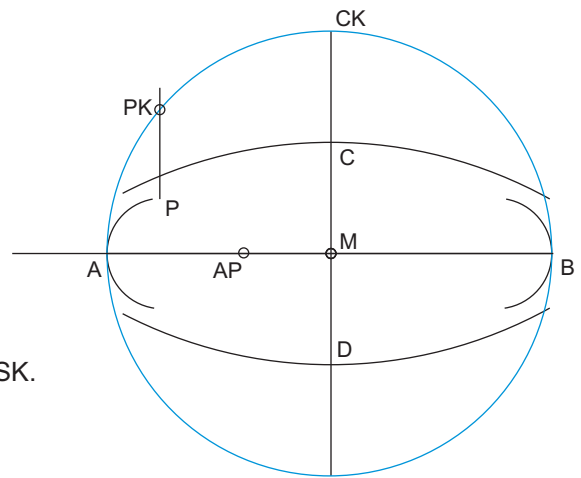
2) Im Überlappungsbereich der Krümmungskreise ist ein genauer Punkt P der Ellipse zu konstruieren.



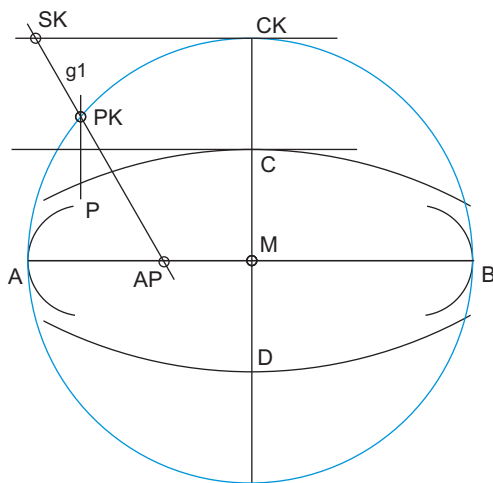
3) Der "Großkreis" wird der Ellipse umschrieben.



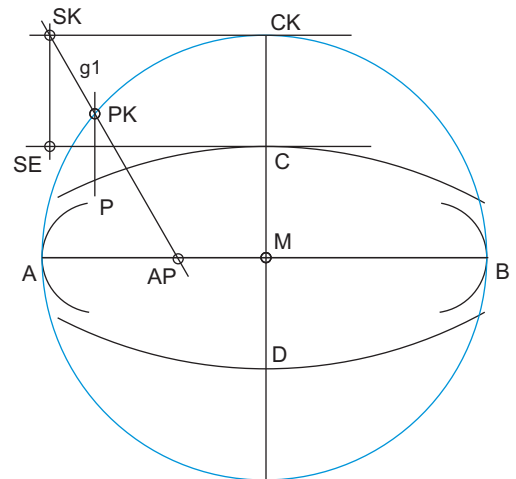
4) Der Punkt P wird auf den Kreis übertragen und ergibt PK. Ein beliebiger Punkt AP wird gewählt.



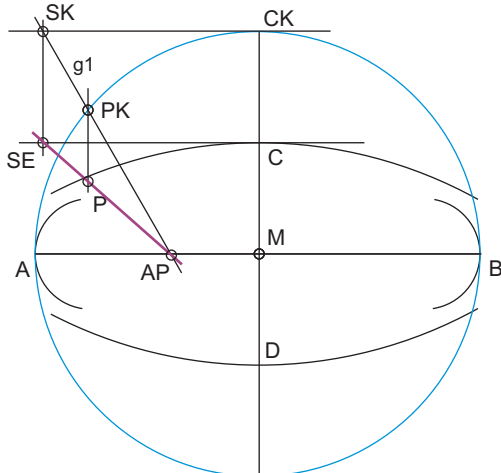
5) Die Verbindung AP mit PK auf die Scheiteltangente ergibt SK.



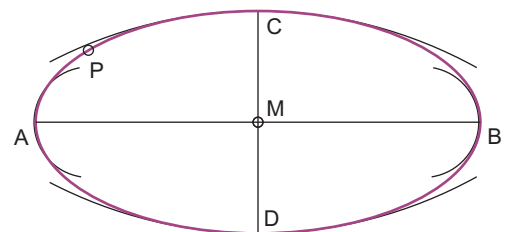
6) SK auf die Scheiteltangente der Ellipse übertragen ergibt den Punkt SE und



7) ..und dieser mit AP verbunden ergibt den Punkt P.



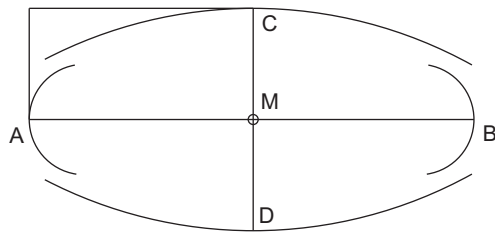
8) Die Ellipse kann gezeichnet werden.



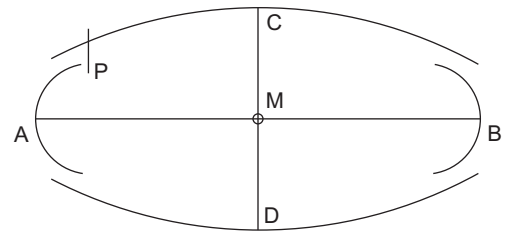
Konstruktionen an der Ellipse: Punkt im Bereich Meth.3



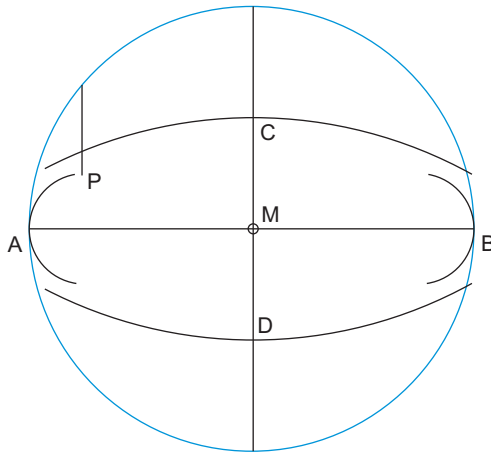
1) Mit der Näherungskonstruktion wurden die Krümmungskreise der Ellipse gezeichnet.



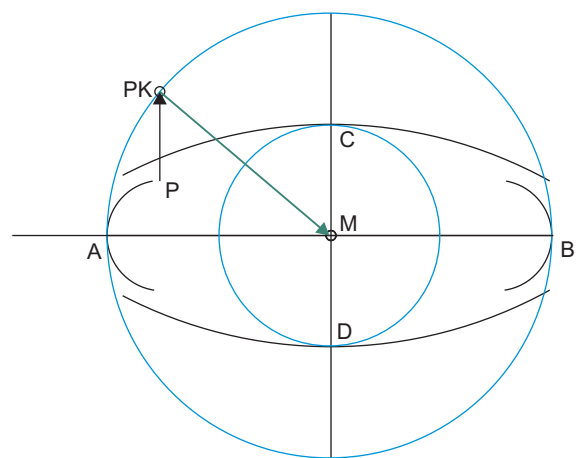
2) Im Überlappungsbereich der Krümmungskreise ist ein genauer Punkt P der Ellipse zu konstruieren.



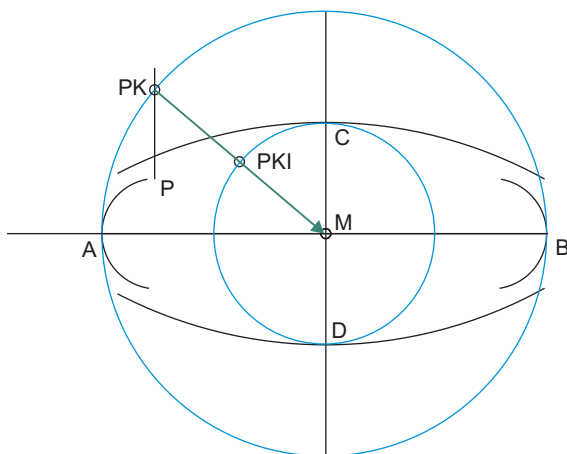
3) Der "Großkreis" der Ellipse wird gezeichnet.



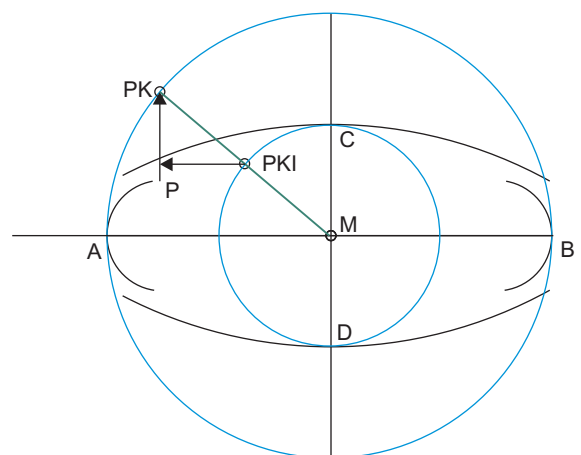
4) Der Punkt P wird auf den Kreis übertragen und ergibt PK. Der Kleinkreis wird in die Ellipse gezeichnet und PK mit M verbunden.



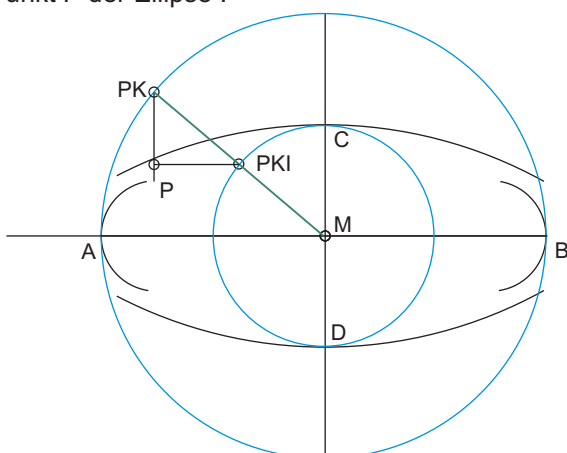
5) Die Verbindung ergibt auf dem Kleinkreis PKI.



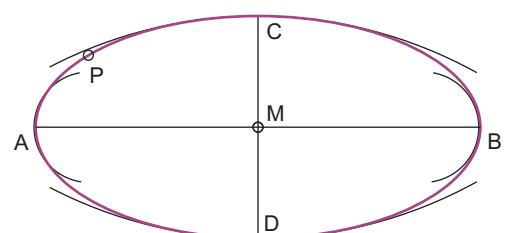
6) Wie auf Seite 1 schon erklärt wird vom Punkt PKI der Kleinkreis auf die Ellipse "gedehnt" und ergibt...



7) ..im Schnittpunkt mit der Vertikalen genau den Punkt P der Ellipse.



8) Die Ellipse kann gezeichnet werden.

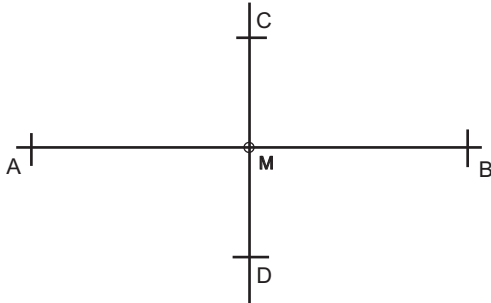


Konstruktionen an der Ellipse: Papierstreifenmethode

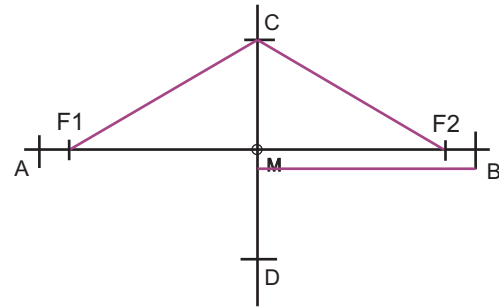


Diese Methode wird kaum in der DG angewendet, sie ist aber jene, die aus der eigentlichen Definition der Ellipse hervorgeht.

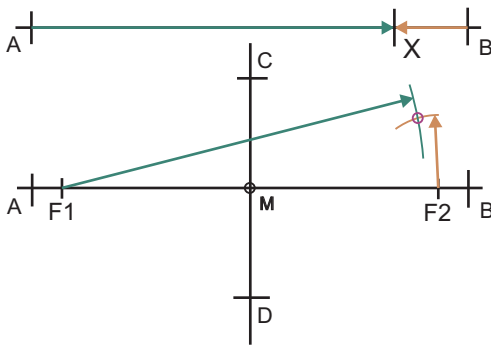
1) Die Ellipse ist durch die beiden Achsen gegeben



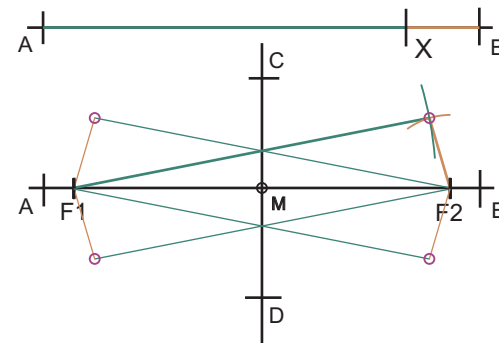
2) Der halbe große Durchmesser, M-B wird in den Zirkel genommen und von C beidseitig auf den großen Durchmesser aufgetragen. Damit werden die Brennpunkte F1 und F2 bestimmt.



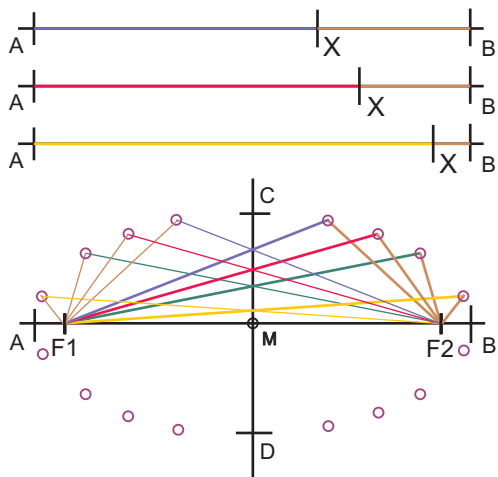
3) Der große Durchmesser, A-B wird nochmals aufgetragen und dient als Hilfslinie. Ein beliebiger Punkt X teilt die Strecke AB. AX wird in den Zirkel genommen und von F1 aus abgeschlagen. BX wird ebenfalls in den Zirkel genommen und von F2 abgeschlagen. Im Schnittpunkt ist ein Ellipsenpunkt.



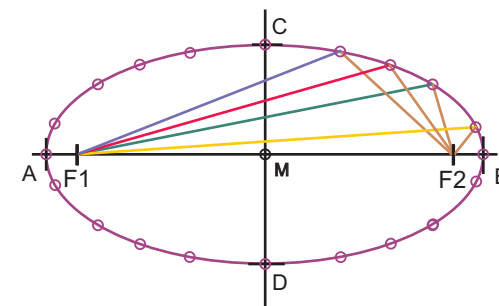
4) Diese Konstruktion kann viermal mit gleichen Zirkel-einstellungen wiederholt werden und ergibt vier Punkte der Ellipse.



5) Der Punkt X wird verschoben und ergibt jeweils eine andere Teilung des großen Durchmessers. Die jeweils linke Teilstrecke wird von F1 aus aufgetragen, der jeweilige Rest des großen Durchmesser wird von F2 aus aufgetragen.



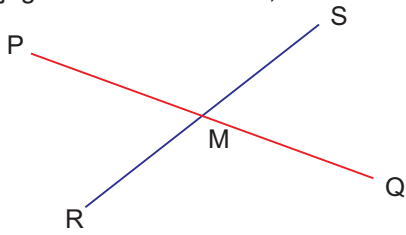
6) Jede Konstruktion eines Ellipsenpunktes kann viermal mit denselben Zirkel-einstellungen ausgeführt werden und zusammen mit den Scheitelpunkten ist die Ellipse gut zu erkennen und kann gezeichnet werden.



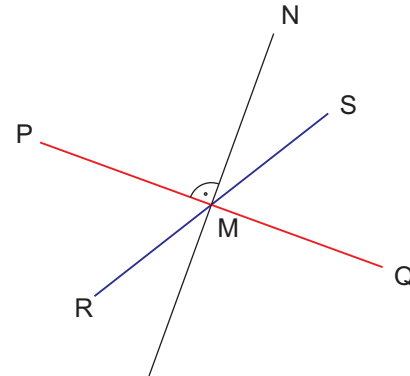
Rytz'sche Achsenkonstruktion (in 7 Schritten)



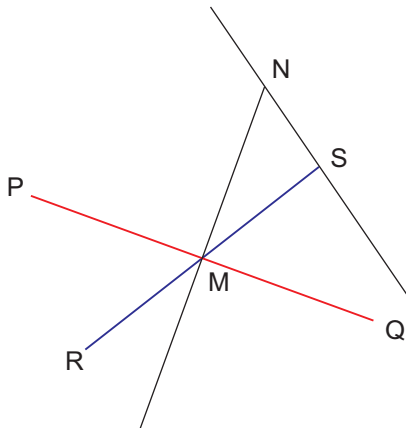
1) Zwei konjugierte Durchmesser^{*)}, PQ und RS sind gegeben.



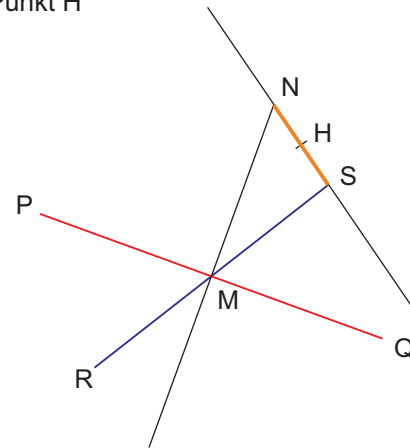
2) Diese definieren eine Ellipse und es sollen die beiden Hauptachsen AB und CD konstruiert werden. PQ wird um 90° gedreht und ergibt den Punkt N



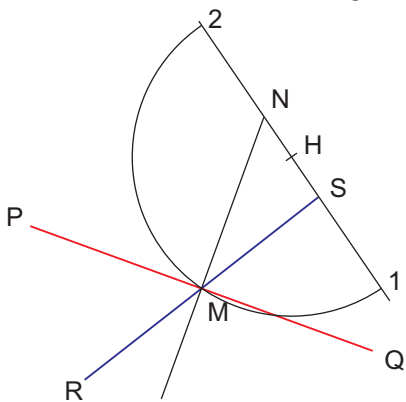
3) S und N werden mit einer verlängerten Geraden verbunden.



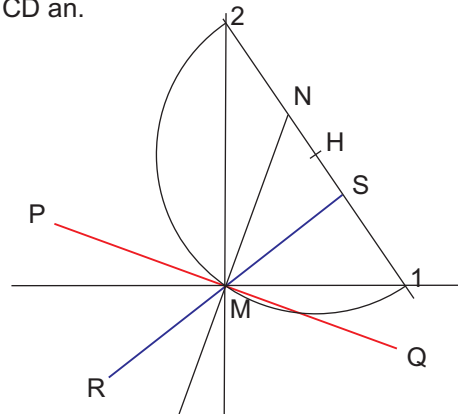
4) Die Strecke N-S wird halbiert und ergibt den Punkt H



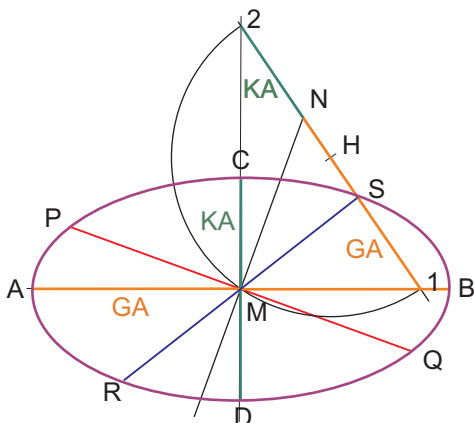
5) Nun wird ein Kreis durch M von H aus gezeichnet.



6) Durch 2 wird eine Verbindung mit M gezeichnet und auch von 1 aus durch M. Diese beiden Geraden sind senkrecht aufeinander (Thaleskreis) und geben die Richtung der gesuchten Durchmesser AB und CD an.



7) Nun ergibt sich auf der Gerade 1-2 die kleine Achse KA zwischen N und 2 und die große Achse GA zwischen N und 1. Diese Achsen werden nun vom Mittelpunkt M aus aufgetragen und ergeben A, B, C, D. Die Ellipse ist fertig.



*) Konjugierte Durchmesser der Ellipse sind im Raum senkrecht aufeinander und erscheinen in schrägen Ansichten, wie im Bild 1), schief zueinander.