Versuch zur Ermittlung der Formel für X_C

In der Erklärung des Ohmschen Gesetzes ergab sich die Formel:

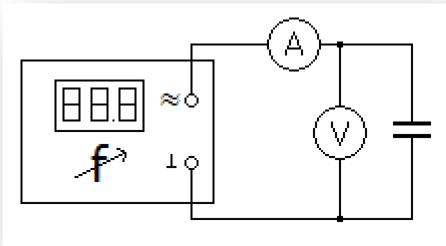
$$R = \frac{U}{I}$$

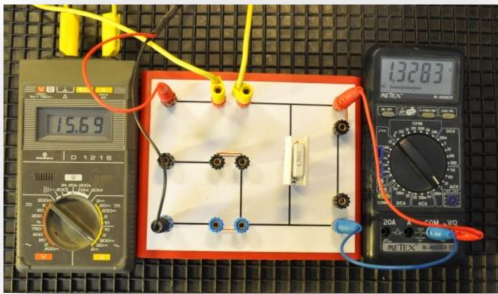
Durch die Versuche mit einem Kondensator bei Gleichstrom wurde erkannt, dass ein Kondensator keinen Ohmschen Widerstand besitzt, dass aber bei angelegter Wechselspannung ein Wechselstrom durch die ständige Änderung der Ladung fließt. Somit hat ein Kondensator, ähnlich wie z.B. eine Glühlampe einen Widerstand, dieser wird X_C bezeichnet.

In einem Versuch, ähnlich wie beim Ohmschen Gesetz, soll nun festgestellt werden, welche Gesetzmäßigkeiten zwischen Strom, Spannung und Widerstand zu finden sind.

Neu ist bei diesem Versuch, dass zwei weitere physikalische Größen zu berücksichtigen sind, die Frequenz des Wechselstromes, Symbol „f", Einheit „Hz" (Hertz) und die Kapazität des Kondensators, Symbol „C", Einheit „F" (Farad).

In der rechten Schaltung ist als Spannungsquelle ein Funktionsgenerator, bei dem Frequenz und Ausgangsspannung digital eingestellt werden kann.





4,7µF			
f	U	I	Xc
(Hz)	(V)	(mA)	(kΩ)
40	1,392	1,644	0,847
80	1,386	3,272	0,424
160	1,365	6,449	0,212
320	1,260	11,904	0,106
400	1,258	14,860	0,085

Inder ersten Versuchsreihe wurden Strom und Spannung bei variabler Frequenz gemessen und der Widerstand X_C berechnet.

Wie beim Ohmschen Gesetz wurden die Zusammenhänge von Strom, Spannung und Widerstand angenommen. Die neue Formel lautet:

$$Xc = \frac{U}{I}$$

Aus der Tabelle ist zu erkennen, dass sich der Wechselstromwiderstand in Abhängigkeit von der Frequenz ändert. Bei etwa gleichbleibender Spannung, steigt der Strom zwischen 40Hz und 80Hz auf das Doppelte und der Widerstand sinkt auf die Hälfte. Ähnliches ergibt sich im Vergleich der Messungen bei 40Hz und 400Hz mit dem Faktor 10.

1. **Erkenntnis:** Der Wechselstromwiderstand Xc verhält sich verkehrt proportional zur Frequenz.

Eine zweite Versuchsreihe mit etwa dreifacher Spannung zeigt, dass sich dabei auch der Strom etwa verdreifacht hat, der Widerstandswert aber etwa wie in der ersten Versuchsreihe nur von der Frequenz abhängig ist und nicht von Strom oder/und Spannung.

4,7µF			
f	U	I	Xc
Hz	V	mA	kΩ
40	4,172	4,92	0,848
80	4,129	9,77	0,423
160	4,107	19,39	0,212
320	3,704	35,03	0,106
400	3,665	43,24	0,085

So wie der ohmsche Widerstand einen Wert hat (in Ω gemessen), hat auch der Kondensator einen Wert, die Kapazität, die in F (meist µF oder nF) gemessen wird. In den beiden Versuchsreihen hatte der Kondensator 4,7µF (oder 4µ7).

In einer weiteren Versuchsreihe wird die Kapazität auf 1/10, auf 0,47 µF (oder µ47) gesenkt.

Der Widerstand sinkt wie vorher bei steigender Frequenz und steigt bei 1/10 der Kapazität auf den 10-fachen Wert.

0,47µF			
f	U	I	Xc
Hz	V	mA	kΩ
40	1,393	0,164	8,478
80	1,385	0,327	4,235
160	1,365	0,645	2,116
320	1,260	1,190	1,059
400	1,259	1,486	0,847

2. **Erkenntnis:** Der Wechselstromwiderstand Xc verhält sich verkehrt proportional zur Kapazität des Kondensators.

Mit den beiden Erkenntnissen, dass der Widerstand sowohl zur Frequenz, als auch zur Kapazität verkehrt proportional ist, wird folgende Formel angenommen:

1. Annahme: $$Xc = \frac{1}{f * C}$$

Nun werden konkrete Zahlen eingesetzt z.B. bei 160 Hz und 4,7µF:

$$212\Omega \neq \frac{1}{160Hz * 0{,}0000047F} = 1329{,}7\Omega \ldots\ldots \text{ also falsch}$$

Das Ergebnis ist um mehr als das Sechsfache größer. Nun wird ein Faktor "k" in die Formel eingefügt, der einen Wert größer 6 haben muss:

2. Annahme: $Xc = \frac{1}{k * f * C}$

Um diesen Faktor genau zu ermitteln wurden beide Versuchsreihen in einer gemeinsamen Tabelle zusammen gelegt und der Faktor „k" berechnet.

4,7µF					0,47µF			
f	U	I	Xc	Faktor k	U	I	Xc	Faktor k
Hz	V	mA	kΩ		V	mA	kΩ	
40	1,392	1,64	0,847	6,282	1,393	0,164	8,478	6,274
80	1,386	3,27	0,424	6,279	1,385	0,327	4,235	6,279
160	1,365	6,45	0,212	6,283	1,365	0,645	2,116	6,284
320	1,260	11,90	0,106	6,282	1,260	1,190	1,059	6,280
400	1,258	14,86	0,085	6,283	1,259	1,486	0,847	6,277

Es ist zu erkennen, dass dieser Faktor bei allen Messungen etwa gleich groß (6,277 bis 6,284) und sowohl von der Frequenz, als auch vom Widerstand unabhängig ist.

Zunächst fällt bei dieser Zahl nichts Besonderes auf, was auf einen Zusammenhang mit dem Wechselstromwiderstand hinweisen würde.

Diese Zahl ist aber unter Berücksichtigung der Messgenauigkeit bei den Versuchen genau 2* Π = 6,28318530. Also lautet die Formel nun:

$$X_C = \frac{1}{2\pi * f * C}$$

Das ergibt sehr wohl einen physikalischen Zusammenhang, da aus der Wechselstromtechnik die Kreisfrequenz mit **ω = 2Π*f** bekannt ist.

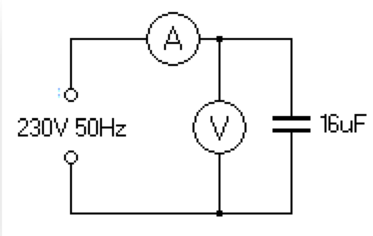
Das Ergebnis der Versuche sind die Formeln für den kapazitiven Wechselstromwiderstand:

$$\boxed{X_C = \frac{1}{\omega * C} = \frac{1}{2\pi * f * C}}$$

Weitere Messungen und Überlegungen an Kondensatoren

Ein Kondensator mit angegebener Kapazität von 16µF/385V wird direkt an die Netzspannung angeschossen. Spannung und Strom werden mit zwei Multimetern gemessen.

$$Xc = \frac{U}{I} = \frac{230{,}7V}{1{,}15A} = 200{,}6\ \Omega$$



Die Formel für den Wechselstromwiderstand „Xc" wird nach der Kapazität „C" aufgelöst und ergibt:

$$C = \frac{1}{2\pi * f * Xc} = \frac{1}{2\pi * 50 * 200{,}6} = 0{,}00001587F = 15{,}87µF$$

Dieser errechnete Wert entspricht der Angabe auf dem Kondensator mit 16µF.

Wenn nun die elektrische Leistung der Schaltung betrachtet wird, so ergibt sich:

P = U*I = 230,7V*1,15A = 265,3W

Wenn in diesem Kondensator tatsächlich 265,3W in Wärme umgesetzt würden, so hätte dieser auf Grund seiner Größe und Oberfläche eine Temperatur von geschätzten 300°C bis 500°C. Er blieb aber bei der Messung auf Raumtemperatur.

Warum?

Um diese Frage zu beantworten ist es nötig mehr über die Wechselstromtechnik zu erfahren (siehe auch Kapitel „Wechselstromtechnik").

In der WS-Technik gibt es gegenüber der Gleichstromtechnik weitere physikalische Größen, die aus der Schwingungslehre stammen und die zu berücksichtigen sind:

Frequenz: f Hz

Phasenlage: φ ° Winkel zwischen Spannung und Strom

Amplitude: U,I V, A zu unterscheiden: Mittelwert, Effektivwert, Spitzenwert

So lautet auch die richtige Formel für die (Wirk-)Leistung in der WS-Technik

$$P = U*I*\cos\varphi,$$

da drei Leistungen unterschieden werden:

Wirkleistung (P) ist jene, die, wie der Name aussagt, etwas bewirkt. Sie bewirkt das Drehmoment in einem Motor, Kraft in einem Hubmagnet, das Licht in einem Leuchtmittel und Wärme einer Heizung.

$$P = U*I*\cos\varphi$$

Blindleistung ist jene, die nichts bewirkt, bei der Leistung (Energie) wechselweise verbraucht und erzeugt wird.

$$Q = U*I*\sin\varphi$$

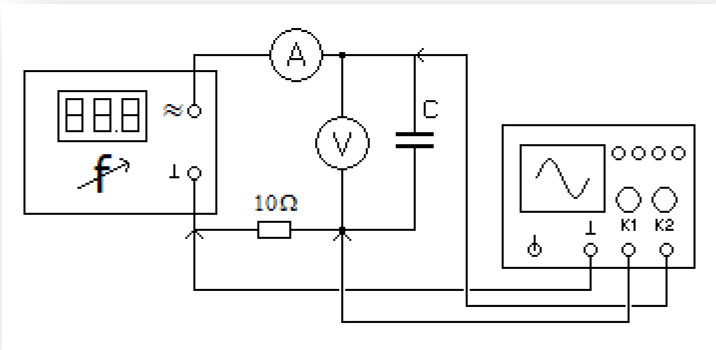
Scheinleistung, vektorielle Zusammensetzung aus Wirk- und Blindleistung.

$$S = U*I$$

Näheres im Abschnitt Wechselstromtechnik. Nun wieder zu unserer Frage, warum der Kondensator nicht heiß wird. Für die mögliche Erwärmung des Kondensators wäre Wirkleistung erforderlich. Nochmals die Formel:

$$P = U*I*\cos\varphi$$

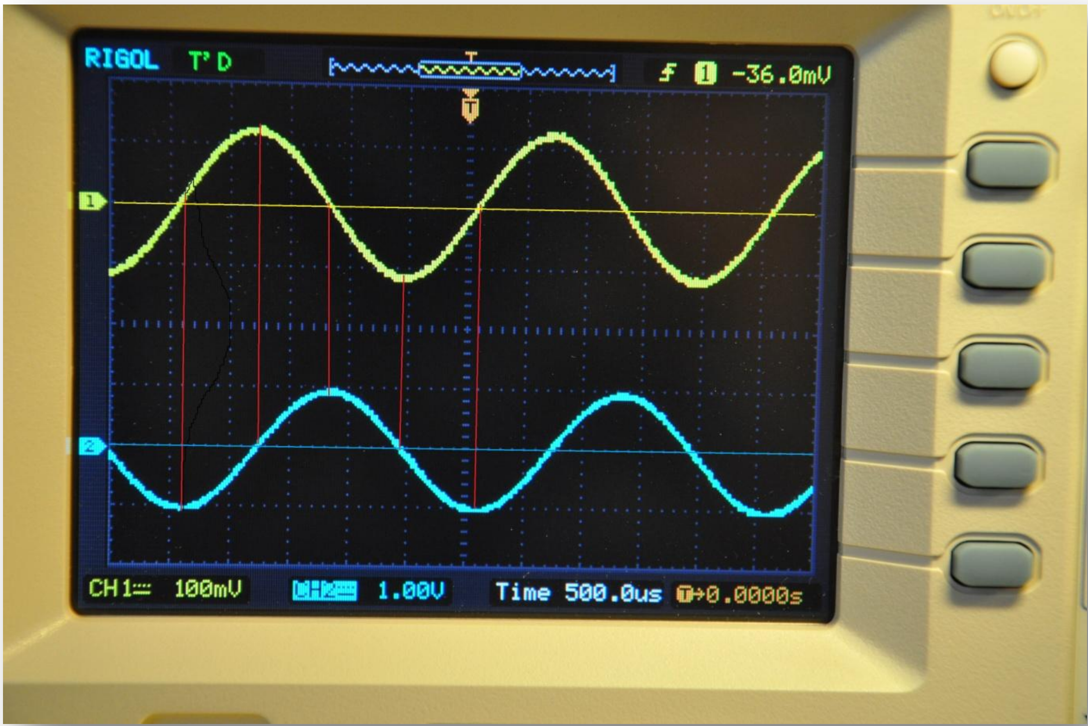
Wie ist es möglich, den Phasenwinkel φ zwischen „U“ und „I“ darzustellen. Es gibt ein Messgerät mit dem Schwingungen mit allen Parametern dargestellt werden können, das Oszilloskop. Mit diesem werden in zwei getrennten Kanälen Spannungen im Bereich von einigen mV bis einige 10V optisch dargestellt.



In der rechten Schaltung ist das Oszilloskop mit den beiden Eingängen K1 und K2 schematisch dargestellt.

Der 10Ω-Widerstand dient dazu den Strom durch den Kondensator in einen Spannungsabfall zu wandeln (Siehe Beschreibung des Ohmschen Gesetzes).
Dadurch ist es möglich im Eingang 1 den äquivalenten Strom und im Eingang 2 die Spannung des Kondensators darzustellen.

In dem unteren Bild ist der zeitliche Verlauf des Stromes in einer gelben Linie und jener der Spannung in einer blauen Linie zu sehen. Die senkrechten roten Linien verbinden die jeweiligen Maxima, Minima und Nulldurchgänge der Sinusschwingungen.



Nun ist zu erkennen, dass wenn der Strom einen Nulldurchgang hat, hat die Spannung ein Maximum und umgekehrt. Null mal ein Maximum ergibt Null. Eine ganze Schwingung geht vom Nulldurchgang in steigender Richtung bis zum nächsten Nulldurchgang in steigender Richtung. Und dies sind im Kreisdiagramm genau 360°.

Vom ersten Nulldurchgang des Stromes (gelb) bis zum nächsten Nulldurchgang der Spannung (blau) ist ¼ der Gesamtschwingung, also 90°. Strom und Spannung sind zeitlich um 90° verschoben. Und dies ist die Antwort auf die Frage.

$$P = U*I*\cos\varphi = U*I*\cos 90° = 230{,}7V*1{,}15A*0 = 0W$$

Die Wirkleistung des Kondensators an der Netzspannung beträgt 0W, daher keine Erwärmung.

Die Blindleistung und in diesem Fall auch die Scheinleistung hingegen beträgt:

$$Q = U*I*\sin\varphi = U*I*\sin 90° = 230{,}7V*1{,}15A*1 = 365{,}3W$$

Mehr zur Blindleistung und weitere Links.