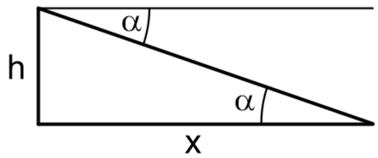
Textbeispiele mit trigonometrischen Lösungen

Anfangsbemerkung: Die folgenden Beispiele stammen aus Übungsblättern von höheren berufs-bildenden Schulen. Sie sind sehr vereinfachte Aufgaben von technischen Anwendungen der Trigonometrie.

Von einem 120m hohen Turm (h) an der Küste des Meeres sieht man eine kleine Insel unter einem Tiefenwinkel von α =19°. (1)

Wie weit (x) ist die Insel (Küste) vom Turm entfernt?



tan(α) = GK / AK   daraus AK = GK / tan(α)

x = h / tan(α) = 120m / tan(19°) = **348,5m** … **Entfernung**

Die Lösung dieser einfachen Aufgabe wird durch die Umformung der Grundformel des Tangens tan(α) = $\frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{AK}}$ nach AK = $\frac{\mathrm{GK}}{\tan(\alpha)}$ ermöglicht.

Nicht berücksichtigt ist bei dieser Aufgabe Ebbe und Flut, die die Entfernung der Inselküste beeinflusst (Wasserweg zur Küste, nicht die Insel selbst).

Auf einem waagrechten Platz steht ein mehrstöckigen Gebäude. Bei diesem sieht ein Beobachter in einer Entfernung von 30m die Unterkante eines Fensters in einem Stockwerk unter 21,8°, die Oberkante unter 24,2°. (2)

Wie hoch ist das Fenster und wie hoch ist das Fenster über dem Platz?

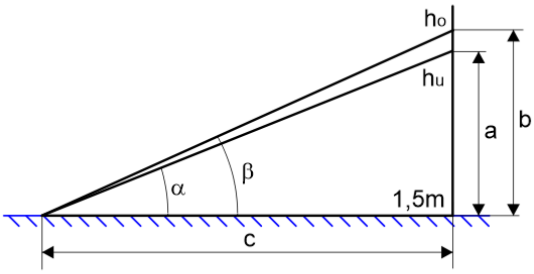
$\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK}$ daraus GK = AK * $\tan(\alpha)$

$h_u = a = c * \tan(\alpha) = 30m * \tan(21{,}8°) = 12{,}0m$

$h_o = b = c * \tan(\beta) = 30m * \tan(24{,}2°) = 13{,}48m$

Fensterhöhe $\mathbf{h_u}$ = b – a = 13,48m – 12m = **1,48m**

Höhe über Platz: **$\mathbf{h_u}$ = 12,0m … Höhe über Platz**

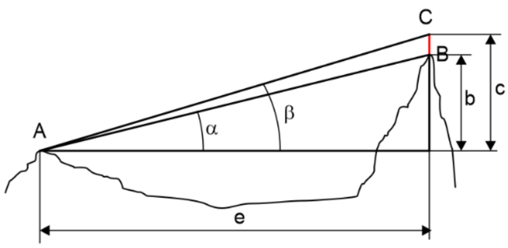


Nicht berücksichtig ist die Tatsache, dass die Winkelmessung nicht vom Boden des Platzes möglich ist, dazu müsste der Beobachter mit dem Winkelmessgerät in einem tiefen Loch stehen. Die übliche Höhe einer Theodolit-Messung ist etwa 1,5m.

Die Berechnung der Fensterhöhe ändert sich nicht, die Höhe über dem Platz muss bei üblichen Messverfahren um 1,5m erhöht werden.

Von einem Ort A mit der Seehöhe 164m wird die Höhe eines Sendemastes BC vermessen, der sich auf dem Gipfel eines Berges mit der Seehöhe 542m befindet. Der Fußpunkt B erscheint unter dem Höhenwinkel α = 14,14°, die Spitze C unter β = 15,46°. (3)

Wie hoch ist der Sendemast?



Zunächst ist es erforderlich ein Dreieck mit der Höhendifferenz von A und B zu zeichnen. Sie beträgt:
$b = h_B - h_A$ = 542m – 164m = 378m

Die Entfernung der beiden Höhenfußpunkte ist nicht gefragt, aber über diese kann eine Berechnung erfolgen:

Allgemein: $\tan(\alpha) = \frac{\text{GK}}{\text{AK}}$ daraus AK = GK / $\tan(\alpha)$

AK = GK / $\tan(\alpha)$ >> e = b / $\tan(\alpha)$ = 378m / tan(14,14°) = 1500m

Mit der AK und dem Winkel β lässt sich die Höhendifferenz plus die Sendemasthöhe (c) berechnen:

GK = AK * $\tan(\beta)$ >> c = 1500m * tan(15,46°) = 414,86m

Die Differenz von b und c ist Sendemasthöhe: h = c – b = 414,86m – 378m = 36,85m etwa 37m.

Es geht aber auch ohne Berechnung von e, dabei wird e als gemeinsame Seite beider Dreiecke benutzt und gleichgesetzt:

$$e = \frac{b}{\tan(\alpha)} = \frac{b+h}{\tan(\beta)}$$ / kreuzweise multiplizieren

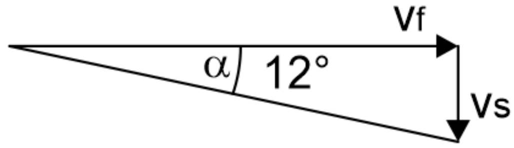
(b + h) * $\tan(\alpha)$ = b * $\tan(\beta)$ / : $\tan(\alpha)$

$$b + h = \frac{b*\tan(\beta}{\tan(\alpha)}$$ / - b

h = $\frac{b*\tan(\beta)}{\tan(\alpha)}$ - b = $\frac{378\text{m}*\tan(15{,}46°)}{\tan(14{,}14°)}$ - 378m = **36,98m etwa 37m … Sendemasthöhe**

Ein mit 450km/h fliegendes Flugzeug befindet sich im Landeanflug mit einem Tiefenwinkel von $\alpha = 12°$. (5)

Wieviel Höhe verliert es pro Minute?



Allgemein: $\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK}$ daraus GK = AK * $\tan(\alpha)$

$V_s = v_f * \tan(\alpha) = 450km/h * \tan(12°) = 95,65km/h$

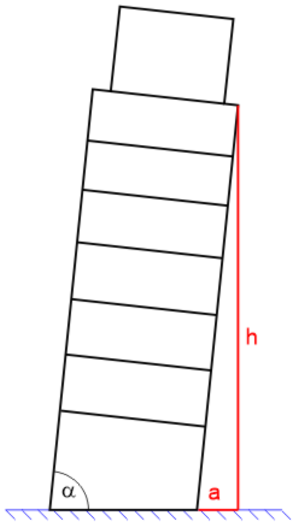
v_s = 95,65km/h (*1000) = 95650m/h (:60) = **1594,2m/min … Sinkgeschwindigkeit**

oder V_s = 26,6 m/s … das ist eine Geschwindigkeit, wie wenn man „einundzwanzig“ sagt und um die Höhe eines dreistöckigen Hauses tiefer sinkt.

Vergleich, der Expressaufzug im Donauturm in Wien fährt mit 6,2 m/s, also rund ein Viertel der Sinkgeschwindigkeit des Fluges.

Ein von der Kante des schiefen Turms von Pisa losgelassener Stein schlägt nach 3,1s genau 4,5m (a) vom Turm entfernt am Boden auf. (Hinweis, freier Fall: Weg s = $\frac{g}{2} * t^2$, g = 9.81 m/s²). (6)

Unter welchem Winkel ist der Turm geneigt?



Zunächst wird die Höhe des freien Falls berechnet:

h = $\frac{g}{2} * t^2 = \frac{9{,}81\text{m}}{2 * s^2} * (3{,}1\text{s})^2$ = **47,14m**

Nun wird der Winkel α berechnet:

Allgemein: $\tan(\alpha) = \frac{\text{GK}}{\text{AK}}$ daraus $\alpha = \arctan(\frac{\text{GK}}{\text{AK}})$

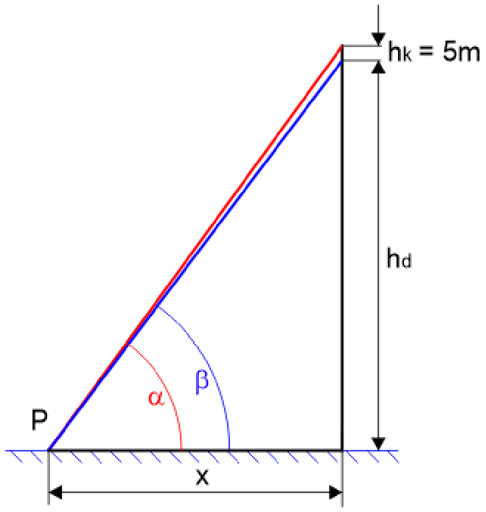
$\alpha = \arctan(\frac{h}{a}) = \arctan(\frac{47{,}14\text{m}}{\text{a}4{,}5\text{m}})$ = **84,55° Neigungswinkel**,

oder der Turm hat sich um 5,45° geneigt.

Zum oberen und unteren Ende eines Gipfelkreuzes der Höhe 5m (h_k) werden von einem Punkt P die Höhenwinkel α = 54° und β = 53° gemessen. (11)

Welche Höhendifferenz (h_d) besteht zwischen dem Gipfel und dem Beobachtungsniveau?

Lösungsansatz: Beide Dreiecke haben eine gemeinsame AK (x), die aus beiden Dreiecken gleichgesetzt werden kann.



Allgemein: $\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK}$ daraus $AK = \frac{GK}{\tan(\alpha)}$

$$x = \frac{hd}{\tan(\beta)} = \frac{hd+5m}{\tan(\alpha)}$$ / kreuzweise multiplizieren

$\tan(\beta) * (h_d + 5m) = \tan(\alpha) * h_d$ / Klammer auflösen

$\tan(\beta) * h_d + \tan(\beta) * 5m = \tan(\alpha) * h_d$ / - $\tan(\beta) * h_d$, alle h_d-Glieder auf eine Seite

$\tan(\beta) * 5m = \tan(\alpha) * h_d - \tan(\beta) * h_d$ / rechts h_d herausheben

$\tan(\beta) * 5m = h_d *(\tan(\alpha) - \tan(\beta))$ / : $\tan(\alpha) - \tan(\beta)$

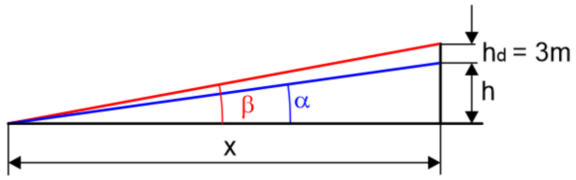
$$\frac{\tan(\beta) * 5m}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)} = h_d$$ / Seitentausch

$$\mathbf{h_d} = \frac{\tan(\beta) * 5m}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)} = \frac{\tan(53°) * 5m}{\tan(54°) - \tan(53°)} = \mathbf{134{,}49m}$$ **... Höhendifferenz**

Zwei Fenster eines Leuchtturmes liegen senkrecht übereinander und haben eine Höhendifferenz von a = 3m. Von ihnen aus sieht man ein Schiff unter dem Tiefenwinkel α = 8° und β = 10,5°. (12)

Wie weit ist das Schiff vom Leuchtturm entfernt?

Allgemein: $\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK}$ daraus $AK = \frac{GK}{\tan(\alpha)}$



$$x = \frac{h}{\tan(\alpha)} = \frac{h+3m}{\tan(\beta)}$$ / kreuzweise multiplizieren

$\tan(\alpha) * (h + 3m) = \tan(\beta) * h$ / Klammer auflösen

$\tan(\alpha) * h + \tan(\alpha) * 3m = \tan(\beta) * h$ / - $\tan(\alpha) * h$ (alle h -Glieder auf eine Seite)

$\tan(\alpha) * 3m = \tan(\beta) * h - \tan(\alpha) * h$ / rechts h herausheben

$\tan(\alpha) * 3m = h * (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$ / : $(\tan(\beta) - \tan(\alpha))$, Seitentausch

$$\mathbf{h} = \frac{\tan(\alpha) * 3m}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)} = \frac{\tan(8°) * 3m}{\tan(10,5°) - \tan(8°)} = 9,41\mathbf{m}$$

Aus dem Rechnungsanfang:

$$\mathbf{x} = \frac{h}{\tan(\alpha)} = \frac{9,41m}{\tan(8°)} = \mathbf{66,96m}$$ **…. Entfernung des Schiffes**
