

Belasteter Träger

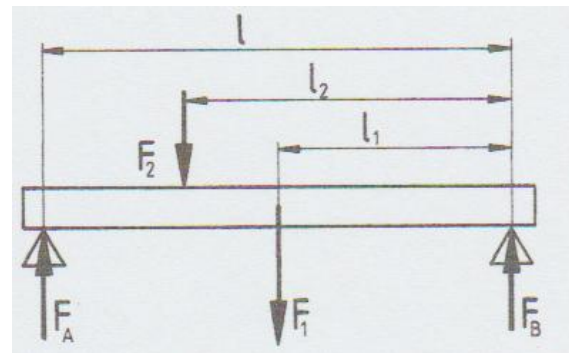


In den folgenden Erklärungen und Beispielen gelten folgende Begriffe:

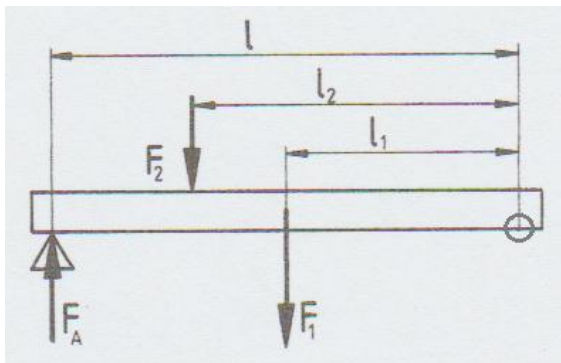
- Σ Summenzeichen
- M_R rechtsdrehendes Drehmoment, in Uhrzeigerrichtung
- M_L linksdrehendes Drehmoment, gegen die Uhrzeigerrichtung
- F_o Kraft nach oben
- F_u Kraft nach unten
- $l...l_x$ Hebellängen, Radien der Drehmomente

Es gelten 2 Gesetze, wenn der Träger ruht:

- 1) Summe aller rechtsdrehenden Drehmomente = Summe aller linksdrehenden Drehmomente
 $\Sigma M_R = \Sigma M_L$
- 2) Summe aller Kräfte nach oben = Summe aller Kräfte nach unten
 $\Sigma F_o = \Sigma F_u$



Um die Auflagekraft F_A berechnen zu können, wird der Auflagepunkt „B“ als Drehpunkt angenommen.



Die Drehmomente werden wie folgt berechnet:

$$F_A \cdot l = F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2 \quad \dots \dots \Sigma M_r = \Sigma M_l$$

Die Auflagekraft F_B wird über die Kräftesumme berechnet:

$$F_A + F_B = F_1 + F_2 \quad \Rightarrow \quad F_B = F_1 + F_2 - F_A$$

Es ist zu bedenken, dass der Träger selbst auch ein Gewicht hat und dass diese Gewichtskraft in der Zeichnung mit F_1 bezeichnet und genau in der Mitte zwischen den Auflagepunkten angesetzt wurde.

Würden die rechts- und linksdrehenden Drehmomente oder die Kräfte nach oben und nach unten **nicht** gleich groß sein, so würde sich der Träger bis zu einem Gleichgewichtszustand **bewegen**. Nur im Stillstand heben diese Kräfte und Drehmomente einander auf, da sie jeweils gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind.

Beispiele:

Aufgabe 1: Ein 3 m langer I-Träger mit der Gewichtskraft 1065 N wird 1 m vom rechten Auflagerpunkt entfernt mit 600 N belastet. Berechnen Sie die Auflagerkräfte in den Endpunkten des Trägers.

$$l = 3\text{ m}, l_1 = 1\text{ m}, F_G = 1065\text{ N}, F = 600\text{ N}$$

Die Gewichtskraft F_G ist in der Mitte angesetzt, der Abstand zu den Auflagerpunkten ist $l/2$ also 1,5m.

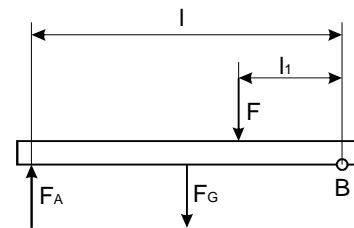
Wie vorher erklärt wird ein Auflagerpunkt (B) als Drehpunkt definiert um die Auflagerkraft des anderen Auflagerpunktes (A) mit der Drehmomentengleichung zu berechnen.

$$\sum M_L = \sum M_R$$

$$F_A \cdot l = F \cdot l_1 + F_G \cdot l/2 \Rightarrow F_A = \frac{F \cdot l_1 + F_G \cdot l/2}{l}$$

$$F_A = \frac{600\text{ N} \cdot 1\text{ m} + 1065\text{ N} \cdot 1,5\text{ m}}{3\text{ m}}$$

$$F_A = 732,5\text{ N}$$



Als zweiter Schritt wird nun die Auflagerkraft des Auflagerpunktes B mit der Kräftegleichung berechnet.

$$\sum F_o = \sum F_u$$

$$F_A + F_B = F + F_G \Rightarrow F_B = F + F_G - F_A$$

$$F_B = 600\text{ N} + 1065\text{ N} - 732,5\text{ N}$$

$$F_B = 932,5\text{ N}$$

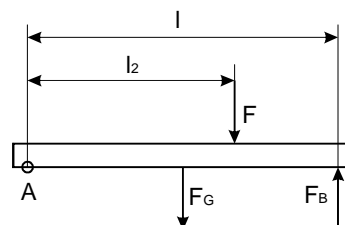
Zur Kontrolle wird nun die Auflagerkraft in Punkt B mit der Drehmomentengleichung berechnet.

$$\sum M_L = \sum M_R$$

$$F_B \cdot l = F \cdot l_2 + F_G \cdot l/2 \Rightarrow F_B = \frac{F \cdot l_2 + F_G \cdot l/2}{l}$$

$$F_B = \frac{600\text{ N} \cdot 2\text{ m} + 1065\text{ N} \cdot 1,5\text{ m}}{3\text{ m}}$$

$$F_B = 932,5\text{ N}$$



Es ist gleiche Ergebnis wie in der ersten Berechnung, daher sind die beiden Berechnungen richtig – wzbw.

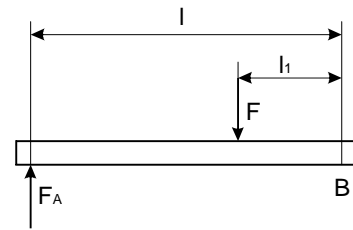
Es ist auch möglich, die Gewichtskraft des Trägers je zur Hälfte auf beide Auflager aufzuteilen und die Berechnung der einwirkenden Kräfte, **ohne** die Gewichtskraft durzuführen. Das ergibt einen etwas einfacheren Rechengang:

$$\Sigma M_L = \Sigma M_R$$

$$F'_A \cdot l = F \cdot l_1 \Rightarrow F'_A = \frac{F \cdot l_1}{l}$$

$$F'_A = \frac{600\text{N} \cdot 1\text{m}}{3\text{m}} = 200\text{N}$$

$$F_A = F'_A + \frac{FG}{2} = 200\text{N} + 532,5\text{N} = 732,5\text{N} \dots \text{Wie vorher berechnet.}$$



F_B wird wie vorher berechnet:

$$\Sigma F_o = \Sigma F_u$$

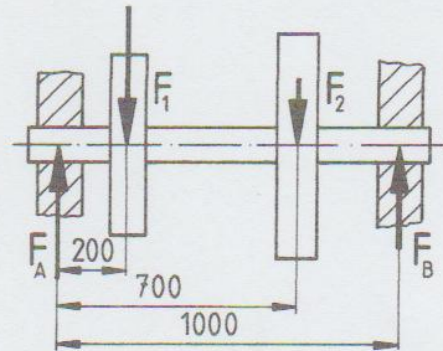
$$F_A + F_B = F + F_G \Rightarrow F_B = F + F_G - F_A$$

$$F_B = 600\text{N} + 1065\text{N} - 732,5\text{N}$$

$$F_B = 932,5\text{N}$$

Aufgabe 2: Eine Welle wird durch zwei Riemenscheiben mit den senkrechten Zugkräften $F_1 = 4000\text{ N}$ und $F_2 = 2000\text{ N}$ belastet. Berechnen Sie die Auflagerkräfte in A und B.

Bei diesem Beispiel werden die Gewichtskräfte der Welle und der Riemenscheiben vernachlässigt, da sie prozentuell zu den Riemenkräften gering sind.



Begonnen wird wieder mit der Drehmomentengleichung. Der Auflagepunkt A wird Drehpunkt, da von ihm aus die Abstände der Kräfte angegeben und daher die Drehmomente leichter zu berechnen sind.

$$\Sigma M_L = \Sigma M_R$$

$$F_B \cdot 1\text{m} = F_1 \cdot 0,2\text{m} + F_2 \cdot 0,7\text{m} \Rightarrow F_B = \frac{F_1 \cdot 0,2\text{m} + F_2 \cdot 0,7\text{m}}{1\text{m}}$$

$$F_B = \frac{4000\text{N} \cdot 0,2\text{m} + 2000 \cdot 0,7\text{m}}{1\text{m}}$$

$$F_B = 2200\text{ N}$$

Als zweiter Schritt wird nun die Auflagerkraft des Auflagepunktes A mit der Kräftegleichung berechnet.

$$\Sigma F_o = \Sigma F_u$$

$$F_A + F_B = F_1 + F_2 \Rightarrow F_A = F_1 + F_2 - F_B$$

$$F_A = 4000\text{N} + 2000\text{N} - 2200\text{N}$$

$$F_A = 3800\text{N}$$

Zur Kontrolle wird nun die Auflagerkraft im Punkt A mit der Drehmomentengleichung berechnet.

$\Sigma M_R = \Sigma M_L$ zu beachten ist, dass die Abstände vom Punkt B aus zu nehmen sind!

$$F_A \cdot 1\text{m} = F_1 \cdot 0,8\text{m} + F_2 \cdot 0,3\text{m} \Rightarrow F_A = \frac{F_1 \cdot 0,8\text{m} + F_2 \cdot 0,3\text{m}}{1\text{m}}$$

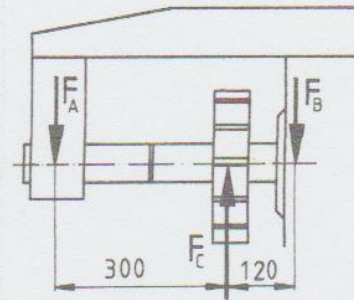
$$F_A = \frac{4000\text{N} \cdot 0,8\text{m} + 2000\text{N} \cdot 0,3\text{m}}{1\text{m}}$$

$$F_A = 3800\text{N}$$

Es ist dasselbe Ergebnis wie in der ersten Berechnung, daher sind die beiden Berechnungen richtig – wzbw.

Aufgabe 3 Auf einen Fräsdorn wirkt die Schnittkraft von 2500 N.
Wie groß ist die Kraft in den Lagern A und B?

Auch bei diesem Beispiel werden die Gewichtskräfte der Welle und des Fräasers vernachlässigt, da sie prozentuell zu der Schnittkraft gering sind.



Begonnen wird mit der Drehmomentengleichung. Das Lager im Punkt B wird als Drehpunkt angenommen. Die Drehmomente werden in N/mm berechnet und verglichen

$$\Sigma M_L = \Sigma M_R$$

$$F_A \cdot 420\text{mm} = F_C \cdot 120\text{mm} \Rightarrow F_A = \frac{F_C \cdot 120\text{mm}}{420\text{mm}}$$

$$F_A = \frac{2500\text{N} \cdot 120\text{mm}}{420\text{mm}}$$

$$F_A = 714\text{ N}$$

Als zweiter Schritt wird nun die Auflagekraft des Lagers beim Punkt B mit der Kräftegleichung berechnet.

$$\Sigma F_o = \Sigma F_u$$

$$F_A + F_B = F_C \Rightarrow F_B = F_C - F_A$$

$$F_B = 2500\text{N} - 714\text{N}$$

F_B = 1786N ... Es ist zu erkennen, dass dieses Lager höher belastet ist, als das Lager beim Punkt A, da auch der Fräser näher beim Punkt B liegt.

Zur Kontrolle wird nun die Auflagekraft im Punkt B mit der Drehmomentengleichung berechnet.

$\Sigma M_R = \Sigma M_L$ zu beachten ist, dass die Abstände vom Punkt A aus zu nehmen sind!

$$F_B \cdot 420\text{mm} = F_C \cdot 300\text{mm} \Rightarrow F_B = \frac{F_C \cdot 300\text{mm}}{420\text{mm}}$$

$$F_A = \frac{2500\text{N} \cdot 300\text{mm}}{420\text{mm}}$$

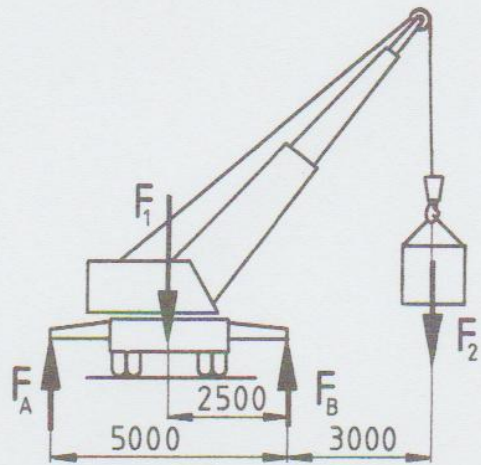
$$F_A = 1786\text{N}$$

Es ist dasselbe Ergebnis wie in der ersten Berechnung, daher sind die beiden Berechnungen richtig – wzbw.

Aufgabe 4: Ein Kran mit dem Gewicht 400 kN hebt eine Last mit 20 kN. Berechnen Sie die Auflagerkräfte in der rechten und linken Abstützung.

Das Besondere bei diesem Beispiel ist, dass eine Kraft außerhalb eines Abstützungspunktes liegt.

Ist das Drehmoment durch diese Kraft größer, als das Drehmoment durch die Gewichtskraft, kippt der Kran um den Punkt B nach außen.



Begonnen wird wieder mit der Drehmomentengleichung. Der Auflagepunkt A wird Drehpunkt, die jeweiligen Abstände der Kräfte von diesem Drehpunkt müssen aus der Zeichnung berechnet werden.

$$\Sigma M_R = \Sigma M_L$$

$$F_1 \cdot 2,5\text{m} + F_2 \cdot 8\text{m} = F_B \cdot 5\text{m} \Rightarrow F_B = \frac{F_1 \cdot 2,5\text{m} + F_2 \cdot 8\text{m}}{5\text{m}}$$

$$F_B = \frac{400\text{kN} \cdot 2,5\text{m} + 20\text{kN} \cdot 8\text{m}}{5\text{m}}$$

$$F_B = 232 \text{ kN}$$

Als zweiter Schritt wird nun die Auflagerkraft des Auflagepunktes A mit der Kräftegleichung berechnet.

$$\Sigma F_o = \Sigma F_u$$

$$F_A + F_B = F_1 + F_2 \Rightarrow F_A = F_1 + F_2 - F_B$$

$$F_A = 400\text{kN} + 20\text{kN} - 232\text{kN}$$

$$F_A = 188\text{kN}$$

Zur Kontrolle wird nun die Auflagerkraft im Punkt B mit der Drehmomentengleichung berechnet.

$$\Sigma M_R = \Sigma M_L \quad \text{..... zu beachten ist, dass die Abstände vom Punkt B aus zu nehmen sind!}$$

$$F_A \cdot 5\text{m} + F_2 \cdot 3\text{m} = F_1 \cdot 2,5\text{m} \Rightarrow F_A = \frac{F_1 \cdot 2,5\text{m} - F_2 \cdot 3\text{m}}{5\text{m}}$$

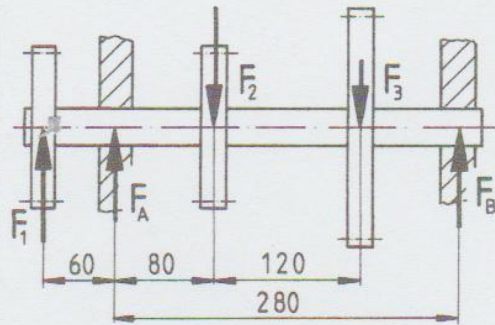
$$F_A = \frac{400\text{kN} \cdot 2,5\text{m} - 20\text{kN} \cdot 3\text{m}}{5\text{m}}$$

$$F_A = 188\text{N}$$

Es ist dasselbe Ergebnis wie in der ersten Berechnung, daher sind die beiden Berechnungen richtig – wzbw.

Aufgabe 5 Berechnen Sie die Lagerkräfte bei der gezeichneten Getriebewelle, wenn $F_1 = 1500 \text{ N}$, $F_2 = 2000 \text{ N}$ und $F_3 = 1000 \text{ N}$ betragen.

Wichtig ist wieder, dass bei den Drehmomentengleichungen, die Abstände vom jeweiligen Drehpunkt angegeben werden. Diese sind aus der Skizze zu entnehmen.



Die Auflage „B“ wird als Drehpunkt gewählt, da alle Kräfte nur auf einer Seite (links) ansetzen. In die Drehmomentengleichung wird eingesetzt:

$$\Sigma M_R = \Sigma M_L$$

$$F_1 \cdot 0,34\text{m} + F_A \cdot 0,28\text{m} = F_2 \cdot 0,2\text{m} + F_3 \cdot 0,08\text{m}$$

daraus

$$F_A = \frac{F_2 \cdot 0,2\text{m} + F_3 \cdot 0,08\text{m} - F_1 \cdot 0,34\text{m}}{0,28\text{m}} = \frac{2\text{kN} \cdot 0,2\text{m} + 1\text{kN} \cdot 0,08\text{m} - 1,5\text{kN} \cdot 0,34\text{m}}{0,28\text{m}} = -0,107\text{kN} = -107\text{N}$$

$$\Sigma F_o = \Sigma F_u$$

$$F_A + F_B + F_1 = F_2 + F_3 \quad \text{daraus} \quad F_B = F_2 + F_3 - F_1 - F_A = 2000\text{N} + 1000\text{N} - 1500\text{N} + 107\text{N}^*) = 1607\text{N}$$

Zur Kontrolle wird nun die Auflagekraft im Punkt B mit der Drehmomentengleichung berechnet.

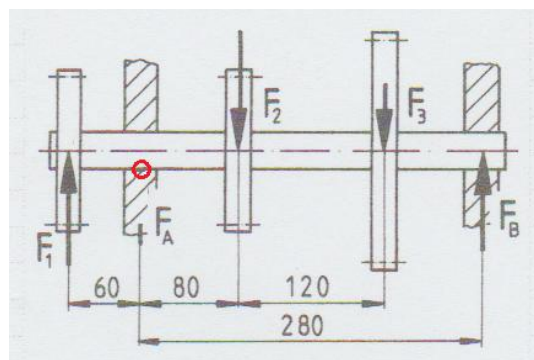
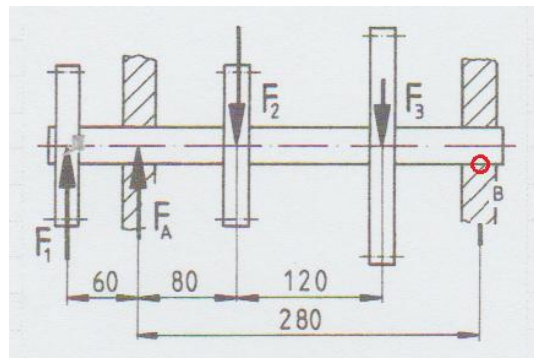
$$\Sigma M_R = \Sigma M_L$$

$$F_1 \cdot 0,06\text{m} + F_2 \cdot 0,08\text{m} + F_3 \cdot 0,2\text{m} = F_B \cdot 0,28\text{m}$$

daraus

$$F_B = \frac{F_1 \cdot 0,06\text{m} + F_2 \cdot 0,08\text{m} + F_3 \cdot 0,2\text{m}}{0,28\text{m}} = \frac{1,5\text{kN} \cdot 0,06\text{m} + 2\text{kN} \cdot 0,08\text{m} + 1\text{kN} \cdot 0,2\text{m}}{0,28\text{m}} =$$

$$= 1,6\text{kN} = 1607\text{N}$$

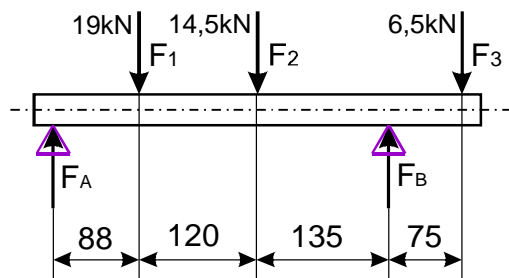


***) diese „+ 107N“ kommen zustande, da F_A an sich in der Gleichung zu subtrahieren wäre, da F_A aber negativ ist, also „-107N“ beträgt, müssen „+107N“ addiert werden.**

Neues Beispiel:

Auf eine Welle wirken die Kräfte $F_1 = 19\text{kN}$, $F_2 = 14,4\text{kN}$, $F_3 = 6,5\text{kN}$, Abstände siehe Zeichnung.

Berechne die Auflagekräfte in A und B.



Es gelten folgende Zusammenhänge:

$\Sigma M_R = \Sigma M_L$... Summe der rechtsdrehenden Momente ist gleich der Summe der linksdrehenden Momente.

$\Sigma F_o = \Sigma F_u$... Summe der Kräfte nach oben ist gleich der Summe der Kräfte nach unten.

Der Auflagepunkt „A“ wird als Drehpunkt gewählt und daraus die Auflagekraft F_B berechnet:

$$\Sigma M_R = \Sigma M_L$$

$$F_1 \cdot 88\text{mm} + F_2 \cdot 208\text{mm} + F_3 \cdot 418\text{mm} = F_B \cdot 343\text{mm}$$

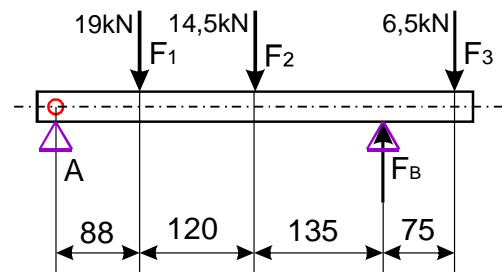
Daraus aufgelöst nach F_B

$$F_B = \frac{19\text{kN} \cdot 88\text{mm} + 14,5\text{kN} \cdot 208\text{mm} + 6,5\text{kN} \cdot 418\text{mm}}{343\text{mm}} = 21,59\text{kN}$$

$$\Sigma F_o = \Sigma F_u$$

$$F_A + F_B = F_1 + F_2 + F_3$$

$$\text{Aufgelöst nach „}F_A\text{“} \dots F_A = F_1 + F_2 + F_3 - F_B = 19\text{kN} + 14,5\text{kN} + 6,5\text{kN} - 21,59\text{kN} = 18,41\text{kN}$$



Zur **Kontrolle** wird die Kraft „ F_A “ mit den Drehmomenten berechnet, Drehpunkt im Punkt „B“.

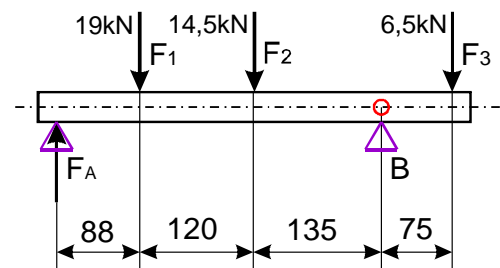
$$\Sigma M_R = \Sigma M_L$$

$$F_A \cdot 343\text{mm} + F_3 \cdot 75\text{mm} = F_1 \cdot 255\text{mm} + F_2 \cdot 135\text{mm}$$

Daraus aufgelöst nach F_A

$$F_A = \frac{F_3 \cdot 255\text{mm} + F_2 \cdot 135\text{mm} - F_3 \cdot 75\text{mm}}{343\text{mm}} = \frac{19\text{kN} \cdot 255\text{mm} + 14,5\text{kN} \cdot 135\text{mm} - 6,5\text{kN} \cdot 75\text{mm}}{343\text{mm}} = 18,41\text{kN}$$

wzbw

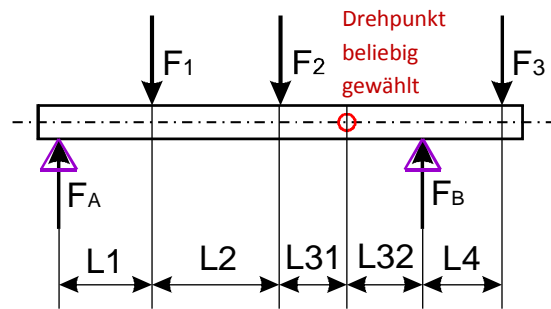


Nur für „mathematische Fundamentalisten“ (Mathefundis) und Lernende mit starken Nerven:

An sich gibt es in diesem Beispiel zwei Unbekannte, „FA“ und „FB“, die berechnet werden sollen. Bei zwei Unbekannten sind auch zwei unabhängige Gleichungen erforderlich.

Diese sind auch gegeben durch, nämlich:

$$\Sigma M_R = \Sigma M_L \quad \text{und} \quad \Sigma F_o = \Sigma F_u$$



Üblicher Weise wird aus einer Formel eine Unbekannte errechnet und diese wird dann in die zweite Formel eingesetzt. Aus der Kräfte-Gleichung wird „FB“ durch die anderen Kräfte ausgedrückt:

1. Gleichung: $\Sigma F_o = \Sigma F_u = F_A + F_B = F_1 + F_2 + F_3$ daraus $F_B = F_1 + F_2 + F_3 - F_A$
2. Gleichung: $\Sigma M_R = \Sigma M_L$

$$F_A * (L_1 + L_2 + L_{31}) + F_3 * (L_4 + L_{32}) = F_B * L_{32} + F_2 * L_{31} + F_1 * (L_{31} + L_2)$$

FB einsetzen, wie aus 1. Gleichung errechnet:

$$F_A * (L_1 + L_2 + L_{31}) + F_3 * (L_4 + L_{32}) = (F_1 + F_2 + F_3 - F_A) * L_{32} + F_2 * L_{31} + F_1 * (L_{31} + L_2)$$

Klammern ausrechnen:

$$F_A * L_1 + F_A * L_2 + F_A * L_{31} + F_3 * L_4 + F_3 * L_{32} = F_1 * L_{32} + F_2 * L_{32} + F_3 * L_{32} - F_A * L_{32} + F_2 * L_{31} + F_1 * L_{31} + F_1 * L_2$$

Alle Produkte mit „FA“ auf die linke Seite der Gleichung:

$$F_A * L_1 + F_A * L_2 + F_A * L_{31} + F_A * L_{32} = F_1 * L_{32} + F_2 * L_{32} + F_3 * L_{32} + F_2 * L_{31} + F_1 * L_{31} + F_1 * L_2 - F_3 * L_4 - F_3 * L_{32}$$

Alle Produkte mit gleichen Kräften zur besseren Übersicht nebeneinander anordnen:

$$F_A * (L_1 + L_2 + L_{31} + L_{32}) = F_1 * L_{32} + F_1 * L_{31} + F_1 * L_2 + F_2 * L_{32} + F_2 * L_{31} + F_3 * L_{32} - F_3 * L_4 - F_3 * L_{32}$$

Aus allen Produkten mit gleichen Kräften, diese herausheben; 2 Produkte heben einander auf:

$$F_A * (L_1 + L_2 + L_{31} + L_{32}) = F_1 * (L_{32} + L_{31} + L_2) + F_2 * (L_{32} + L_{31}) - F_3 * L_4$$

Endgleichung für FA durch Division durch (L1 + L2 + L31 + L32) ergibt:

$$F_A = \frac{F_1 * (L_{32} + L_{31} + L_2) + F_2 * (L_{32} + L_{31}) - F_3 * L_4}{L_1 + L_2 + L_{31} + L_{32}}$$

Werte einsetzen:

$$F_A = \frac{19\text{kN} * (70\text{mm} + 65\text{mm} + 120\text{mm}) + 14,5\text{kN} * (70\text{mm} + 65\text{mm}) - 6,5\text{kN} * 75\text{mm}}{88\text{mm} + 120\text{mm} + 65\text{mm} + 70\text{mm}} = 18,41\text{kN}$$

Den nun errechneten Wert für FA in die Kräftegleichung einsetzen:

$$F_B = F_1 + F_2 + F_3 - F_A = 19\text{kN} + 14,5\text{kN} + 6,5\text{kN} - 18,41\text{kN} = 21,59\text{kN}$$

Beide Ergebnisse sind mit der Berechnung auf der Vorderseite ident, daher richtig!

Wenn der Aufwand dieser Methode – zuerst allgemeine Auflösung der Gleichungen durch ableiten und einsetzen – betrachtet und ein Vergleich mit der Berechnung auf der Vorderseite angestellt wird, ist zu erkennen, dass diese Methode viel aufwändiger und vor allem fehleranfälliger ist, daher ist die einfachere Berechnung der Vorderseite jedenfalls vorzuziehen.