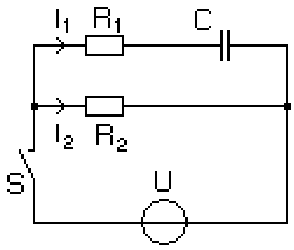
Beispiele Aufladung von Kondensatoren, Berechnung von Strömen, Spannungen, Zeiten und Kapazitäten.

1. (876) Beispiel



1.1 Angaben: R_1 = 2MΩ, R_2 = 5MΩ, C = 2µF, U = 60V

1.2 Aufgabe: Nach wie vielen Sekunden nach dem Einschalten sind die Ströme durch R_1 und R_2 gleich groß?

1.3 Wissensvoraussetzungen:

1.3.1 Beim Einschalten ist der Kondensator entladen und es fließt ein Strom I_1 durch R_1 nur durch die Spannungsquelle U bestimmt.

$I_1 = U / R_1$ = 60V / 2MΩ = 30µA

1.3.2 Die Ströme I_1 und I_2 verhalten sich verkehrt proportional zu den Widerständen R_1 und R_2

$I_1 / I_2 = R_2 / R_1$

Daraus ist auch zu erkennen, dass I_2 durch R_2 (5MΩ) kleiner ist, als im Einschaltzeitpunkt I_1 durch R_1 (2MΩ).

I_2 bleibt konstant. $I_2 = U / R_2$ = 60V / 5MΩ = 12µA

Es gibt mehrere Lösungswege, hier wurde ein Weg gewählt, der die Betrachtung der Spannungs-verläufe zulässt, zum besseren Verständnis der tatsächlichen Vorgänge.

R_1 und C sind in Serie geschaltet und somit ist die Summe der beiden Spannungsabfälle immer die Gesamtspannung U.

$U = U_{R1} + U_C$

Mit zunehmender Aufladung des Kondensators nimmt auch die Spannung am Kondensator zu und die Spannung am Widerstand fällt.

1.4 Aufgabenlösung

Aus obiger Erklärung beträgt der Strom durch R2 konstant 12µA. Die Frage ist, wie klein muss die Spannung an R1 werden, dass nur 12µA (der Anfangswert betrug 30µA) durch R1 fließen.

$U_{R1} = R_1 * I_1$ = 2MΩ * 12µA = 24V …….. somit muss der Kondensator auf die Restspannung auf 60V aufgeladen werden, nämlich auf 36V.

Formel für den Spannungsverlauf der Kondensatoraufladung:

$$u = U(\,1 - e^{-\frac{t}{R*C}})$$

Diese Formel muss nun nach t umgewandelt werden:

$$u = U\left(1 - e^{-\frac{t}{R*C}}\right) \qquad /:U$$

$$\frac{u}{U} = 1 - e^{-\frac{t}{R*C}} \qquad /-1$$

$$\frac{u}{U} - 1 = -e^{-\frac{t}{R*C}} \qquad /*(-1)$$

$$1 - \frac{u}{U} = e^{-\frac{t}{R*C}} \qquad /\ln$$

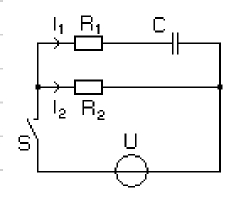
$$\ln\left(1 - \frac{u}{U}\right) = -\frac{t}{R*C} \qquad /*R*C$$

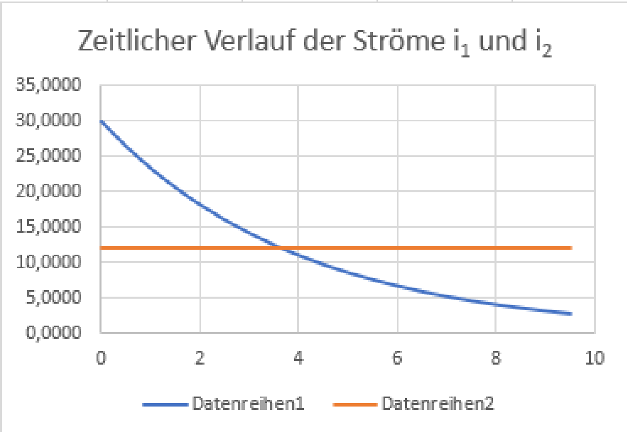
$$\mathrm{R} * \mathrm{C} * \ln\left(1 - \frac{u}{U}\right) = -t \qquad /*(-1) \text{ und einsetzen}$$

$$\mathrm{t} = -2\mathrm{M}\Omega * 2\mu\mathrm{F} * \ln\left(1 - \frac{36V}{60}\right) = \mathbf{3{,}67}\boldsymbol{s}$$

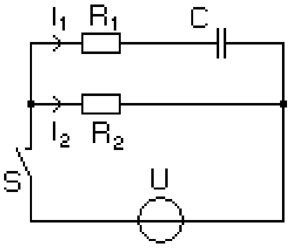
In der untenstehenden selbstrechnenden EXCEL-Tabelle ist zu erkennen, dass bei der errechneten Zeit von 3,67s (genau 3,66516s) die beiden Ströme gleich sind.

t in s	Uc	i1 in µA	i2 in µA	U	R1 in MΩ	C in µF	R2 in MΩ
0	0,0000	30,0000	12	60	2	2	5
0,5	7,0502	26,4749	12				
1	13,2720	23,3640	12				
1,5	18,7626	20,6187	12				
2	23,6082	18,1959	12				
2,5	27,8843	16,0578	12				
3	31,6580	14,1710	12				
3,5	34,9883	12,5059	12				
3,66516	**36,0000**	**12,0000**	**12**				
4	37,9272	11,0364	12				
4,5	40,5209	9,7396	12				
5	42,8097	8,5951	12				
5,5	44,8296	7,5852	12				
6	46,6122	6,6939	12				
6,5	48,1853	5,9074	12				
7	49,5736	5,2132	12				
7,5	50,7987	4,6006	12				
8	51,8799	4,0601	12				
8,5	52,8340	3,5830	12				
9	53,6760	3,1620	12				
9,5	54,4191	2,7904	12				





2. (877) Beispiel



2.1 Angaben: R_1 = 0,25MΩ, C = 0,8µF, U = 125V

2.2 Aufgabe: Welchen Wert hat R_2 wenn nach dem Einschalten dieser vom halben Strom durch R_1 durchflossen wird. Nach wie vielen Sekunden nach dem Einschalten sind die Ströme durch R_1 und R_2 gleich groß?

2.3 Wissensvoraussetzungen:

2.3.1 Beim Einschalten ist der Kondensator entladen und es fließt ein Strom I_1 durch R_1 nur durch die Spannungsquelle U bestimmt.

$I_1 = U / R_1$ = 125V / 0,25MΩ = 0,5mA

2.3.2 Die Ströme I_1 und I_2 verhalten sich verkehrt proportional zu den Widerständen R_1 und R_2

$I_1 / I_2 = R_2 / R_1$

Wenn also der halbe Strom, der durch R_1 fließt (0,5mA) durch R_2 fließen soll, muss der Wert von R_2 doppelt so groß sein, wie der von R_1.

$R_2 = R_1 * 2$ = 0,25MΩ * 2 = 0,5M.

I_2 bleibt konstant. $I_2 = U / R_2$ = 125V / 0,5MΩ = 0,25mA

Es gibt mehrere Lösungswege, hier wurde ein Weg gewählt, der die Betrachtung der Stromverläufe zulässt.

Die zur Lösung führende Formel ist die des zeitlichen Verlaufes des Ladestromes

$$i = I * e^{-\frac{t}{R*C}}$$

2.4 Aufgabenlösung: Wann sind die Ströme I_1 und I_2 gleich groß

$$\mathrm{I2} = \mathrm{I1} * e^{-\frac{t}{R*C}} \qquad /:I_1$$

$$\frac{I2}{I1} = e^{-\frac{t}{R*C}} \qquad /\ln$$

$$\frac{I2}{I1} = e^{-\frac{t}{R*C}} \qquad /\ln$$

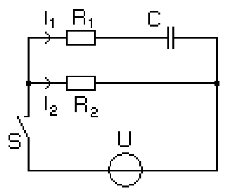
$$\ln\frac{I2}{I1} = -\frac{t}{R*C} \qquad /*R*C$$

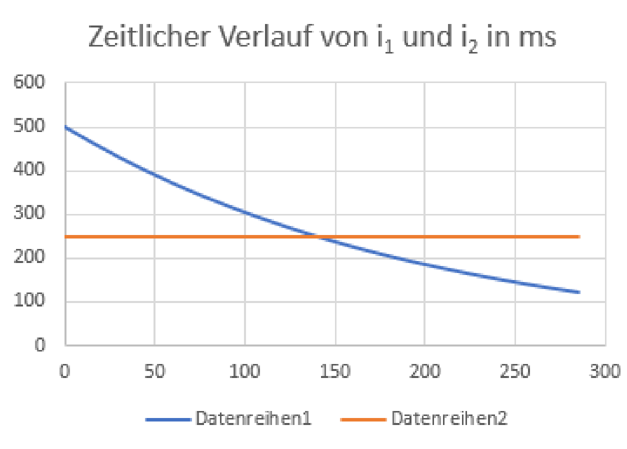
$$\mathrm{R} * \mathrm{C} * \ln\frac{I2}{I1} = -t \qquad /*(-1) \text{ und einsetzen}$$

$$\mathrm{t} = -0{,}5\mathrm{M\Omega} * 0{,}8\mathrm{\mu F} * \ln\frac{0{,}25mA}{0{,}5mA} = \mathbf{0{,}139s}$$

t in ms	Uc	i1 in µA	I2 in µA
0	0,0000	500	250
15	9,0321	464	250
30	17,4115	430	250
45	25,1855	399	250
60	32,3977	370	250
75	39,0888	344	250
90	45,2965	319	250
105	51,0556	296	250
120	56,3985	274	250
135	61,3554	255	250
138,6291	**62,4999**	**250**	**250**
150	65,9542	236	250
165	70,2206	219	250
180	74,1788	203	250
195	77,8510	189	250
210	81,2578	175	250
225	84,4184	162	250
240	87,3507	151	250
255	90,0711	140	250
270	92,5950	130	250
285	94,9364	120	250

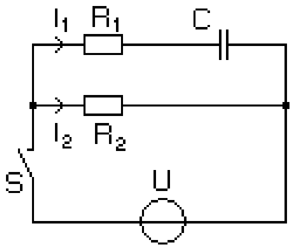
u in V	R1 in MΩ	R2 in MΩ	C in µF
125	0,25	0,5	0,8





Aus der selbstrechnenden Excel-Tabelle ist deutlich zu erkennen wie I_1 im zeitlichen Verlauf sinkt und dass er beim errechneten Wert von 0,139s (genau 0,1386291s) denselben Wert wie I_2 hat. Auch die Anfangsbedingungen, I_2 ist die Hälfte von I_1 , ist zu sehen.

3. Beispiel - übrigens: Was geschieht, nachdem der Kondensator aufgeladen ist und der Schalter S geöffnet wird?



3.1 Angaben: R_1 = 2MΩ, R_2 = 5MΩ, C = 2µF, U = 60V

3.2 Nach welcher Zeit hat der Kondensator die halbe Spannung?

3.3 Antwort: Der Kondensator entlädt sich über beide Widerstände.

$$\mathrm{u} = \mathrm{U} * e^{-\frac{t}{R*C}}$$ /:U

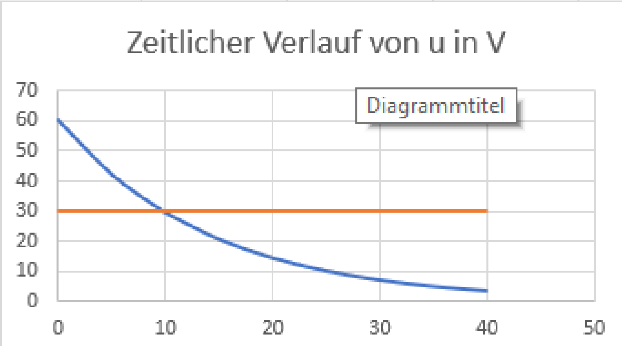
$$\frac{u}{U} = e^{-\frac{t}{R*C}}$$ /ln

$$\ln\frac{u}{U} = -\frac{t}{R*C}$$ /*R*C

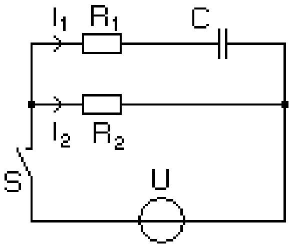
$$\mathrm{R} * \mathrm{C} * \ln\frac{u}{U} = -t$$ /*(-1) und einsetzen

$$\mathrm{t} = -7\mathrm{M}\Omega * 2\mu\mathrm{F} * \ln\frac{30V}{60V} = \mathbf{9{,}7}\boldsymbol{s}$$

t	u	$R_{entladung}$	U/2	U in V	R_1 in MΩ	R_2 in MΩ	C in µF
s	V	MΩ	V	60	2	5	2
0	60	7	30				
5	41,98	7	30				
9,704	30,00	7	30				
10	29,37	7	30				
15	20,55	7	30				
20	14,38	7	30				
25	10,06	7	30				
30	7,04	7	30				
35	4,93	7	30				
40	3,45	7	30				
45	2,41	7	30				
50	1,69	7	30				



4. (878) Beispiel



4.1 Angaben: R_1 = 50kΩ, R_2 = 80kΩ, U = 300V

4.2 Aufgabe: Welche Kapazität hat der Kondensator, wenn 1,5s nach dem Einschalten der ***Gesamtstrom*** auf die Hälfte absinkt?

4.3 Wissensvoraussetzungen: Dieselben, wie zum Lösen der vorigen Aufgaben

4.4 Lösung:

Der Gesamtwiderstand beim Einschalten besteht aus der Parallelschaltung von R_1 und R_2.

$R_{ges} = R_1 \,//\, R_2 = \frac{R1*R2}{R1+R2} = \frac{50k*80k}{50k+80k} = 30{,}77\ k\Omega$

$I_2 = U / R_2$ = 300V / 80 kΩ = 3,75mA ….. dieser Strom fließt immer, wenn S geschlossen ist.

$I_1 = U / R_1$ = 300 / 50kΩ = 6mA …. dieser Strom fließt nur im Einschaltmoment.

Beim Einschalten: $I_{ges} = I_1 + I_2$ = 3,75mA + 6 mA = 9,75mA

oder $I_{ges} = U_{ges} / R_{ges}$ = 300V / 30,77 kΩ = 9,75mA

Der halbe Gesamtstrom beträgt: $I_H = I_{ges}$ / 2 = 9,75 / 2 = 4,875mA

Nachdem durch R_2 ein Dauerstrom von 3,75mA fließt muss der Strom durch R_1 zum Zeitpunkt von 1,5s die Differenz zum halben Strom betragen also: i = 4,875mA – 3,75mA = 1,125mA. Der Anfangsstrom durch R_1 betrug 6mA (I_1= 300V/50kΩ)

$$\mathrm{i} = \mathrm{I} * e^{-\frac{t}{R*C}} \qquad /:\mathrm{U}$$

$$\frac{i}{I} = e^{-\frac{t}{R*C}} \qquad /\ln$$

$$\frac{i}{I} = e^{-\frac{t}{R*C}} \qquad /\ln$$

$$\ln\frac{i}{I} = -\frac{t}{R*C} \qquad / *\mathrm{C}\ \ / :\ln\frac{i}{I}$$

$$\mathrm{C} = -\frac{t}{R*\ln\frac{i}{I}} \qquad / \text{einsetzen}$$

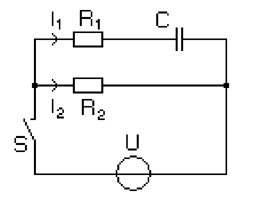
$$\mathbf{C = -\frac{1{,}5s}{50k*\ln\frac{1{,}125mA}{6mA}} = 17{,}9\mu F}$$

In der selbst rechnenden Exceltabelle wurden 4 Kapazitätswerte für C angenommen, 10µF, 15µF, der errechnete, genaue Wert 17,9214µF und 20µF. Der zeitliche Verlauf der Ströme bis 2s sind in der Tabelle dargestellt. Die Werte bei jeweils 1,5 s sind hervorgehoben.

Zu ersehen ist, dass nach 1,5s Einschaltdauer nur bei der errechneten Kapazität (genau 17,9214µF) der Gesamtstrom exakt die Hälfte (4,875mA) des Anfangsstromes (9,75mA) hat.

Die Anfangsströme sind bei allen Kapazitätswerten gleich, da beim Einschalten alle Kondensatoren entladen sind.

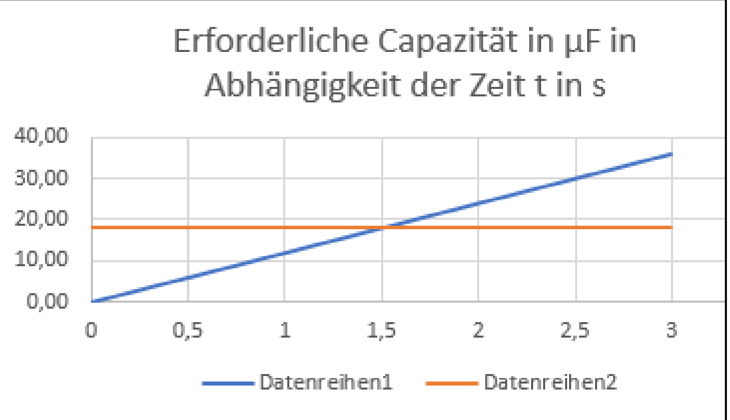
C	i1	i2	iges	t	u in V	R1 in kΩ	R2 in kΩ
µF	mA	mA	mA	s	300	50	80
10	6,0000	3,75	9,7500	0	I_0 in mA	6	3,75
10	2,2073	3,75	5,9573	0,5			
10	0,8120	3,75	4,5620	1			
10	**0,2987**	**3,75**	**4,0487**	**1,5**			
10	0,1099	3,75	3,8599	2			
15	6,0000	3,75	9,7500	0			
15	3,0805	3,75	6,8305	0,5			
15	1,5816	3,75	5,3316	1			
15	**0,8120**	**3,75**	**4,5620**	**1,5**			
15	0,4169	3,75	4,1669	2			
17,9214	6,0000	3,75	**9,7500**	0			
17,9214	3,4341	3,75	7,1841	0,5			
17,9214	1,9656	3,75	5,7156	1			
17,9214	**1,1250**	**3,75**	**4,8750**	**1,5**			
17,9214	0,6439	3,75	4,3939	2			
17,9214	0,3685	3,75	4,1185	2,5			
20	6,0000	3,75	9,7500	0			
20	3,6392	3,75	7,3892	0,5			
20	2,2073	3,75	5,9573	1			
20	**1,3388**	**3,75**	**5,0888**	**1,5**			



Bei kleineren Kapazitäten (z.B. 10µF und 15µF) sinkt der Gesamtstrom schneller, der Gesamtstrom ist nach 1,5s unter dem halben Anfangs-Gesamtstrom.

Bei höheren Kapazitäten (z.B 20µF) sinkt der Gesamtstrom langsamer, daher ist dieser nach 1,5s noch nicht auf den halben Anfangs-Gesamtstromwert gesunken.

t	C
s	µF
0	0,00
0,5	5,97
1	11,95
1,5	**17,92**
2	23,90
2,5	29,87
3	35,84
3,5	41,82
4	47,79



Hier noch einige Gedanken zu Beispielen aus Lehrbüchern.

$u = U(\,1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ .... das ist die Formel für den zeitlichen Verlauf der Spannung beim Aufladen eines Kondensators.

Für die Zeitkonstante τ gilt: $\tau = R * C$

Zeitkonstanten sind errechnete Werte, sie können mit keinem Messgerät gemessen werden, wohl aber gemessen werden können die physikalischen Größen, deren Produkt sie ergeben, also zum Beispiel C, L, R.

Daher bevorzuge ich bei (hoffentlich) praxisbezogenen Beispielen in den entsprechenden Formeln die messbaren elektrischen Größen zu verwenden, da diese leichter zu „begreifen“ und damit vorstellbarer sind, als deren Produkte.

$u = U(\,1 - e^{-\frac{t}{R*C}})$ oder $i = I(\,1 - e^{-\frac{t}{R*L}})$

In der Praxis ist es hauptsächlich erforderliche eine Kapazität, eine Induktivität oder einen Widerstand zu berechnen. Sollte jedoch die Zeitkonstante gesucht oder angegeben sein, dann wird diese mit der Formel $\tau = R * C$ berechnet.

Aus meiner jahrzehntelangen Tätigkeit als ehrenamtlicher Nachhilfelehrer habe ich in fachbezogenen Lehrbüchern vorwiegend Beispiele gesehen, die äußerst wenig mit dem eigentlichen Fach zu tun haben, sondern hauptsächlich rein mathematische Fähigkeiten für die Lösung erfordern und fast nie auf eine praktische technische Problemlösung hinzielen. Daher sind solche Beispiele selbst für den technisch interessierten Lernenden kaum nachvollziehbar. Wie Helmut Qualtinger alias Travnicek einmal sagte „Zarwos brauch i des“, wird sich dies wohl schon mancher gedacht haben.

Daher meine Bitte an Kollegen in technischen Schulen, in den technischen Fächern erfreut euch an euren Kenntnissen der mathematischen Philosophien, die ihr selbst einmal, vermutlich mühsam erlernt habt und bringt den Schülern Beispiele, die einen praktischen Bezug haben, möglichst interessante Problemlösungen erfordern und verwendet nicht Beispiele aus Lehrbüchern, die teilweise von Unterlagen aus dem 19 Jahrhundert (Induktivität einer Ringspule auf Hartholzkern) immer wieder, bis in die Gegenwart abgeschrieben wurden und werden.