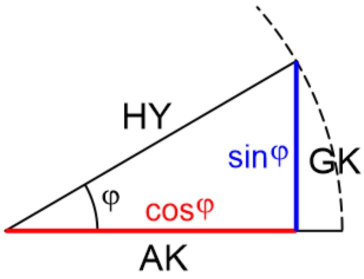
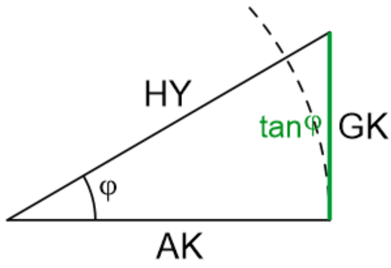
Beispiele mit Winkelfunktionen

In den folgenden vier Beispielen soll besonders auch auf die Lösungsmethoden geachtet werden.

Als Werkzeuge für die Lösung gelten die drei Grundformeln der Winkelfunktionen,

$\sin\varphi = GK / HY$
$\cos\varphi = AK / HY$
$\tan\varphi = GK / AK$





und der Pythagoreische Lehrsatz (kurz auch als „Pythagoras“ bezeichnet):

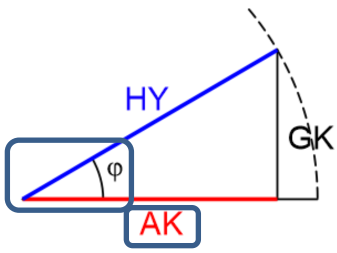
$HY^2 = GK^2 + AK^2$, das Quadrat über der Hypotenuse ist die Summe der Katheten-Quadrate.
Bekannter ist die Grundform **$c^2 = a^2 + b^2$**, da es sich aber in diesen Beispielen um Winkelfunktionen handelt, wurden die Bezeichnungen **HY, AK, GK** für **Hypotenuse, Ankathete und Gegenkathete** der Seiten verwendet (AN- und Gegen- bezogen auf den Winkelφ).

---

1. Beispiel:

Ein rechtwinkeliges Dreieck hat eine Kathete mit der Länge von 14 cm. Der spitze Winkel des Dreiecks hat einen Cosinus von 0,8.

Bestimme die Längen der anderen Seiten und die anderen Winkel.



In den drei Formeln, **$\sin\varphi = GK / HY$, $\cos\varphi = AK / HY$, $\tan\varphi = GK / AK$,** enthält nur eine die Angaben, nämlich:

$\boxed{\cos\varphi} = \boxed{AK} / HY$

Es gibt also eine Kathete und einen anliegenden Winkel.

Aus der Formel kann die Hypotenuse berechnet werden

$\cos\varphi = AK / HY$ daraus **$HY = AK / \cos\varphi$ = 14 cm / 0,8 = 17,5 cm**. Die zweite Kathete wird mit dem „Pythagoras“ berechnet:

$HY^2 = GK^2 + AK^2$ daraus $GK = \sqrt{HY^2 - AK^2} = \sqrt{17,5^2 - 14^2}$ = 10,5 cm

Die Summe aller Winkel im Dreieck ist 180°, ein Winkel hat 30°, der rechte Winkel 90° also bleiben für den dritten Winkel 180°-30°-90° = 60° übrig.

Ergebnis: Die drei Seitenlängen betragen 10,5 cm, 14 cm, 17,5 cm, die drei Winkel 30°, 60°, 90°.

---

2. Beispiel:

Bei einem rechtwinkeligen Dreieck sind die Katheten 6 cm und 10 cm lang.

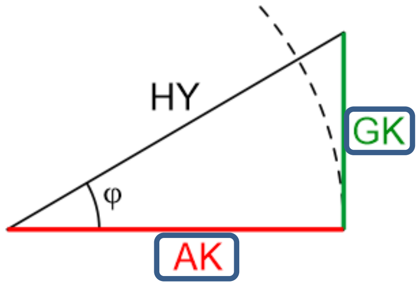
Wie lange ist die Hypothenuse? Bestimme mit Hilfe der Winkelfunktionen den spitzen Winkel des Dreiecks.

In den vorhandenen „Werkzeugen" sind in zwei Formeln die Angaben enthalten:

sinφ = GK / HY, cosφ = AK / HY, tanφ = $\boxed{GK / AK}$ und $HY^2 = \boxed{GK^2 + AK^2}$

Wäre nur die Hypothenuse gefragt, wäre der Phytagoras als Lösungsansatz der richtige. Da es aber ein Beispiel mit Winkelfunktionen ist, wird der Weg über einen Winkel gewählt.

tanφ = GK / AK daraus **φ = arctan GK / AK**



Die ARCTAN-Funktion ist am Taschenrechner meist mit der Taste 2nd und gefolgt von der TAN – Taste auszuführen.

φ = arctan GK / AK = arctan 6 cm / 10 cm = 31°

Die Hypotenuse wird nun mit der cos-Formel berechnet:

cosφ = AK / HY daraus **HY = AK / cosφ = 10cm / cos31° = 10cm / 0,86 = 11,67cm**

Ergebnis: Der spitze Winkel beträgt 31°, die Hypotenuse ist 11,67cm lang

---

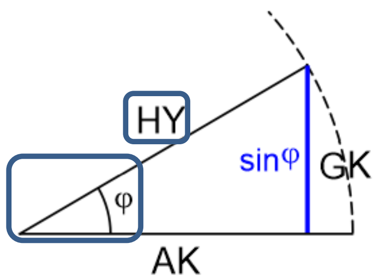
3. Beispiel:

Ein rechtwinkeliges Dreieck hat eine Hypotenuse mit 16cm Länge und einen spitzen Winkel von 30°.

Wie lange sind die Katheten?

Es gibt mehrere Lösungswege, gewählt wurde Sinusfunktion danach Pythagoras:

sinφ = GK / HY daraus **GK = HY * sinφ = 16cm * sin30° = 16cm * 0,5 = 8cm**



Pythagoras:

$HY^2 = GK^2 + AK^2$ daraus $AK = \sqrt{HY^2 - GK^2} = \sqrt{16^2 - 8^2} =$ **13,8cm**

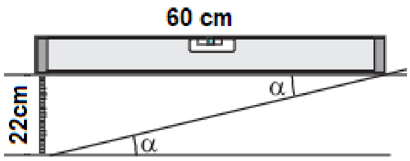
Ergebnis: Die Katheten sind 16 cm und 13,8 cm lang

Es wäre auch möglich gewesen die AK über die COS-Funktion zu berechnen:

cosφ = AK / HY daraus **AK = HY * cosφ = 16cm * cos30° = 16cm * 0,5 = 13,8cm**

4. Beispiel:

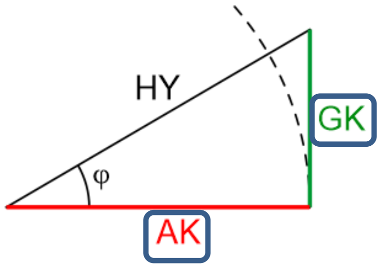
Mit einer Wasserwaage und einem Maßstab soll die Steigung eines Daches bestimmt werden, wie in nebenstehender Zeichnung dargestellt ist.



Wie groß ist der Neigungswinkel?

Es sind die beiden Katheten gegeben und der Winkel gefragt.

In den drei Formeln, **sinφ = GK / HY, cosφ = AK / HY, tanφ = GK / AK,** enthält nur eine unsere beiden Angaben, nämlich:



tanφ = $\boxed{\textbf{GK}}$ **/** $\boxed{\textbf{AK}}$

Aus dieser Formel wird der Winkel φ berechnet.

tanφ = GK / AK daraus **φ = arctan GK / AK**

Die gemessenen Werte werden eingesetzt:

φ = arctan GK / AK = arctan 22 cm / 60 cm = 20°

Ergebnis: Die Dachschräge hat eine Neigung (einen Winkel) von 20°.

Zur Methode der Lösungen:

Die Werkzeuge für Textbeispiele mit Winkelfunktionen sind die drei Grundformeln mit den jeweiligen „arc“-Funktionen und, nicht unbedingt notwendig, auch der pythagoreische Lehrsatz.

sinφ = GK / HY

cosφ = AK / HY

tanφ = GK / AK

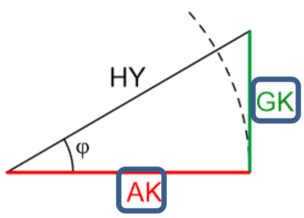
φ = arcxxx XX / XX

$HY^2 = GK^2 + AK^2$

Die Beispiele lassen sich auch ohne Pythagoras lösen. In Europa wurden die ersten trigonometrischen Tabellen von Georg von Peuerbach (Astronom im 15. Jhdt.) erstellt und so sollen doch auch die „alten Griechen“ bei der Berechnung unserer aktuellen Anwendungsbeispiele mithelfen.

Vorgang:

1) Aus dem Aufgabentext herausfinden, welche Teile eines rechtwinkeligen Dreiecks als Angaben zur Verfügung stehen. Hilfreich ist auch eine Skizze des Dreiecks zu zeichnen und die bekannten Größen darin zu markieren (siehe rechtes Bespiel).



2) **Auswahl,** in welcher Formel diese Angaben enthalten sind.

3) Wenn nötig umformen der Formel, um die **gesuchte** Größe berechnen zu können.

4) **Einsetzen** der Angaben und **berechnen** der gesuchten Größe.

5) **Weitere** Größen mittels weiterer Winkelfunktionen oder dem Pythagoras **berechnen**.