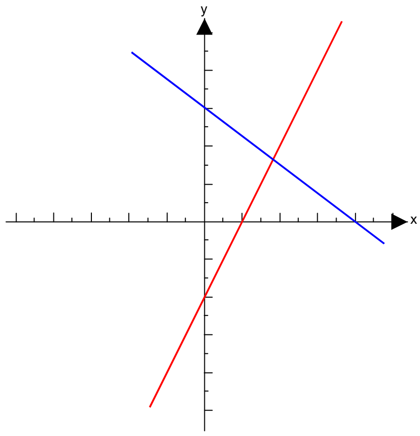
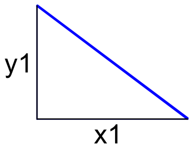
Grafische und rechnerische Lösung zweier Gleichungen mit 2 Variablen





x1	y1
0	0
2	-1,5
4	-3
6	-4,5
8	-6

1. Funktion (Gesetzmäßigkeit, Gleichung)
Wenn x1 den Wert +4 annimmt, nimmt y1 den Wert -3 an. Bei steigendem Wert von x, fällt y .... Gefälle.

Allgemeine Form der Funktion:
$y = k*x + d$
k ist die Neigung (Steigung oder Gefälle)
d ist der Wert von y bei x = 0

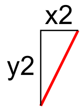
k = -3/4 (negativ, daher Gefälle), d = 3

y = -3/4x + 3

Wie im Diagramm zu sehen ist, haben beide Funktionen (Gleichungen) einen Schnittpunkt, nämlich dort, wo die x- und die y-Werte gleich groß sind.

Somit kann der Schnittpunkt einfach durch Gleichsetzen von x- oder y-Werten ermittelt werden.

Die Methode, den y-Wert beider Funktionen gleichzusetzen, ist in den beiden unteren Beispielen zu erkennen.



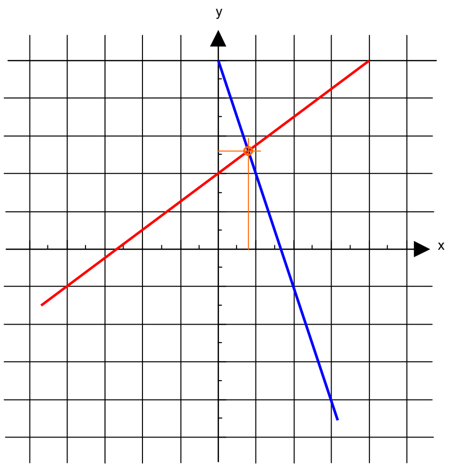
x2	y2
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8

2. Funktion (Gesetzmäßigkeit, Gleichung)
Wenn x2 den Wert +1 annimmt, nimmt y2 den Wert +2 an. Bei steigendem Wert von x, steigt y .... Steigung.

Allgemeine Form der Funktion:
$y = k*x + d$
k ist die Neigung (Steigung oder Gefälle)
d ist der Wert von y bei x = 0

k = 2/1 (positiv, daher Steigung), d = -2

y = 2x - 2



Allgemeine Form
y = kx + d
y = 3/4x + 2
k = 3/4 (Steigung)
d = 2

Allgemeine Form
y = kx + d
y = -3x + 5
k = -3 (Gefälle)
d = 2

Gleichung:

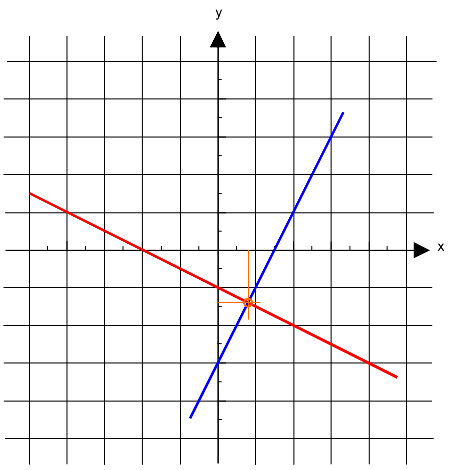
3/4x + 2 = - 3x + 5 / +3x, -2

3 3/4x = 3

x = 0,8

y = -3*0,8 + 5

y = 2,6



Allgemeine Form
y = kx + d
y = -1/2x - 1
k = -1/2 (Gefälle)
d = -1

Allgemeine Form
y = kx + d
y = 2x - 3
k = 2 (Steigung)
d = -3

Gleichung:

-1/2x - 1 = 2x - 3 / +1/2x, +3

2 = 2,5x

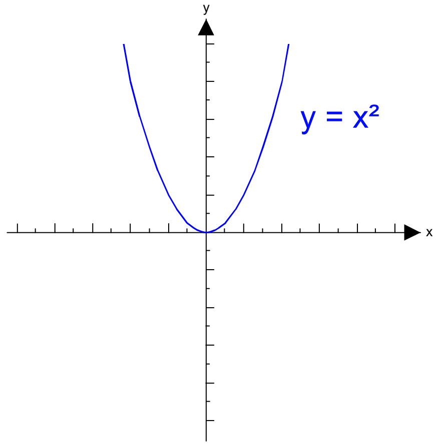
x = 2/2,5 = 0,8

y = - 1/2x - 1 = - 0,4 - 1

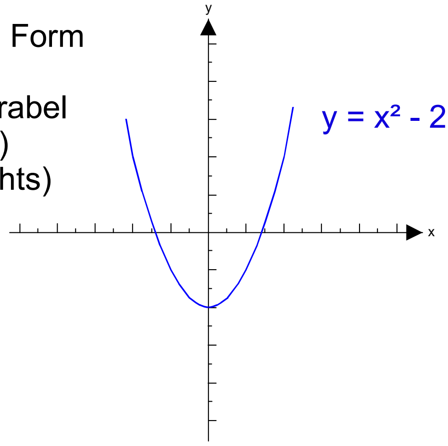
y = -1,4

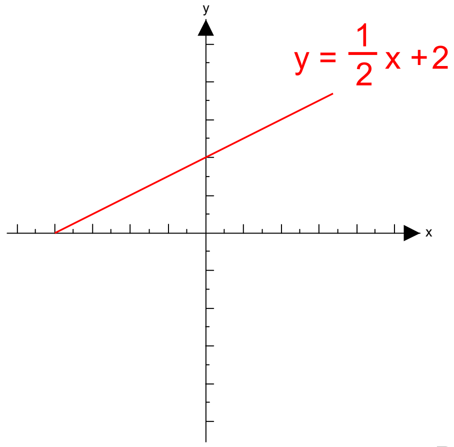
Auf den nächsten Seiten sind Beispiele mit einer Gerade und anderen Kurvenformen zu sehen. Dabei können auch mehrere Schnittpunkte mit der Geraden vorkommen.

Grafische und rechnerische Lösung zweier Gleichungen mit 2 Variablen

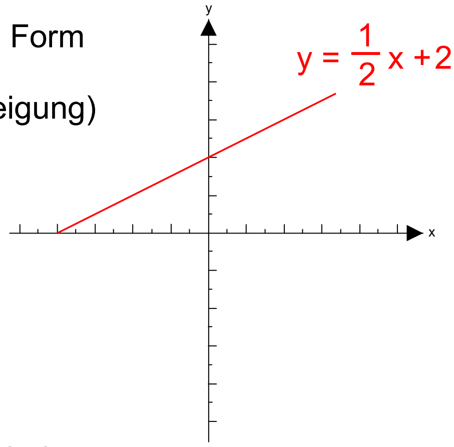


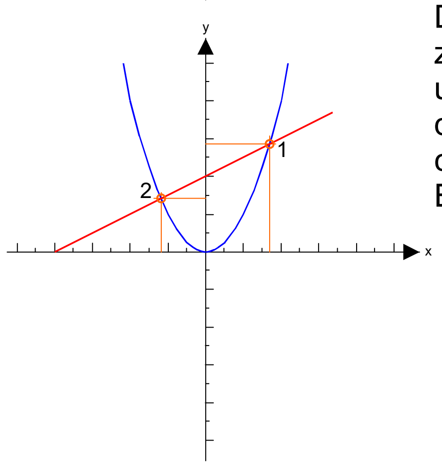
Allgemeine Form
$y = kx + d$
$y = x^2$ ...Parabel
$d = 0$ (links)
$d = -2$ (rechts)



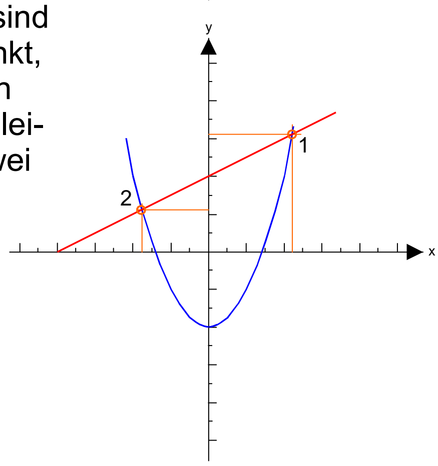


Allgemeine Form
$y = kx + d$
$k = 1/2$ (Steigung)
$d = 2$





Die Lösungen sind zwei Schnittpunkt, und rechnerisch quadratische Gleichungen mit zwei Ergebnissen.



y beider Gleichungen werden gleichgesetzt.

Gl 1: $y = x^2$

Gl 2: $y = \frac{1}{2}x + 2$

$x^2 = \frac{1}{2}x + 2 \qquad / -\frac{1}{2}x, -2$

$x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0 \qquad p = -\frac{1}{2} \qquad q = -2$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2}$

$x_1 = 1{,}686 \quad y_1 = 2{,}843$

$x_2 = -1{,}18 \quad y_2 = 1{,}41$

Gl 1: $y = x^2 - 2$

Gl 2: $y = \frac{1}{2}x + 2$

$x^2 - 2 = \frac{1}{2}x + 2 \qquad / -\frac{1}{2}x, -2$

$x^2 - \frac{1}{2}x - 4 = 0 \qquad p = -\frac{1}{2} \qquad q = -4$

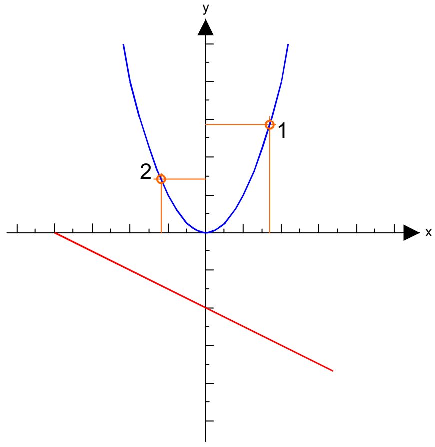
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

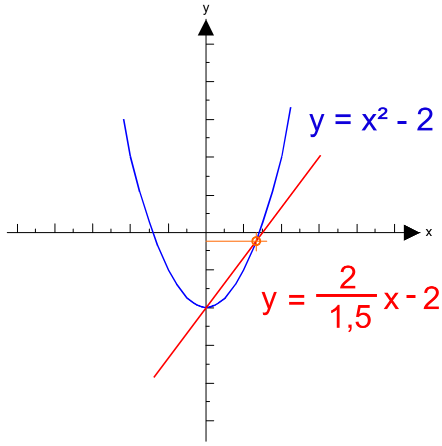
$x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4}$

$x_1 = 2{,}266 \quad y_1 = 3{,}133$

$x_2 = -1{,}766 \quad y_2 = 1{,}117$

Grafische und rechnerische Lösung zweier Gleichungen mit 2 Variablen





Gl 1: $y = x^2$

Gl 2: $y = -\frac{1}{2}x - 2$

$x^2 = -\frac{1}{2}x - 2 \qquad / +\frac{1}{2}x, +2$

$x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0$

Normalform: $x^2 + px + q = 0$

Lösung: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0 \qquad p = \frac{1}{2}, \quad q = 2$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2}$

Der Wert unter der Wurzel ist negativ, daher kann keine Wurzel gezogen werden, daher keine Lösung!

Aus der Grafik ist zu erkennen, dass es keine Schnittpunkte beider Funktionen gibt.

y beider Gleichungen werden gleichgesetzt.

Gl 1: $y = x^2 - 2$

Gl 2: $y = \frac{2}{1,5}x - 2$

$x^2 - 2 = \frac{2}{1,5}x - 2 \qquad / -\frac{2}{1,5}x, +2$

$x^2 - \frac{2}{1,5}x + 0 = 0$

Normalform: $x^2 + px + q = 0$

Lösung: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x^2 - \frac{2}{1,5}x + 0 = 0 \qquad p = -\frac{2}{1,5}, \; q = 0$

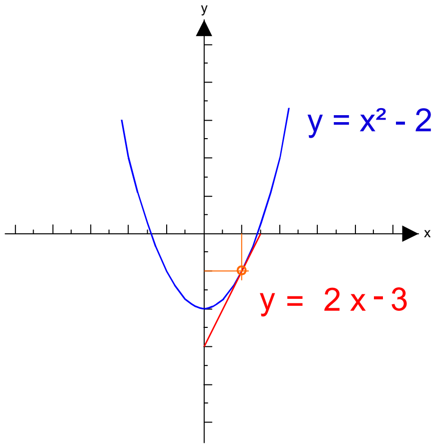
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1,2} = \frac{1,33}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1,33}{2}\right)^2}$

$x_1 = 1,33 \quad y_1 = 1,33 * 1,33 - 2 = -0,23$

$x_2 = 0 \quad y_2 = 0 - 2 = -2$

Grafische und rechnerische Lösung zweier Gleichungen mit 2 Variablen



In diesem Beispiel wurde die Parabel des vorigen Beispiels beibehalten und ein Tangente an die Parabel gelegt

Eine Tangente berührt eine Kurve nur an einem Punkt und so müssten beide x-Werte der quadratischen Gleichung auch gleich sei und damit auch die y-Werte.

Die Berechnung des Tangenten-punktes unter dem Diagramm er-gibt tatsächlich den Punkt mit $x = 1$ und $y = -1$.

In einer Tabelle ist zu erkennen, dass bei fallender Steigung von 3/1,4 (k=2,1) bis 3/1,5 (k=2) in den beiden linken Spalten, die x1- und x2-Werte einan-der annähern (die beiden rechten Spalten) bis sie bei 3/1,5 (k=2) gleich werden.

3	1,4	-3	-0,687	-1,456
3	1,425	-3	-0,724	-1,381
3	1,45	-3	-0,770	-1,299
3	1,475	-3	-0,832	-1,202
3	1,5	-3	-1,000	-1,000
3	1,525	-3	Error	Error

Gl 1: $y = x^2 - 2$

Gl 2: $y = 2x - 3$

$x^2 - 2 = 2x - 3 \qquad / -2x, +3$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

Normalform: $x^2 + px + q = 0$

Lösung: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad p = -2, q = 1$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 1}$

$x_{1,2} = 1$

aus Gl 2 .... $y_{1,2} = 2x - 3 = 2 - 3 = -1$